Praktikumsprotokoll

Versuch Nr. 701/705
Statistik des radioaktiven Zerfalls / Reichweite von α-Strahlung in Luft

Frank Hommes
und
Kilian Klug

Durchgeführt am:
04 Mai 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Theoretische Hintergründe **3**
2.1 Der radioaktive Zerfall 3
2.2 α-Teilchen 4
2.2.1 Der α-Zerfall 4
2.2.2 Wechselwirkung mit Materie 6
2.2.3 Reichweite 6

3 Durchführung und Auswertung 701 **9**

4 Durchführung und Auswertung 705 **11**

5 Anhang **14**

1 Einleitung

Hier sollen zwei Experimente beschrieben und ausgewertet werden, die beide aus dem Gebiet der Kernphysik stammen. Im ersten Versuch (Nr. 701) geht es um die statistischen Merkmale bei der Beobachtung einer größeren Zahl von radioaktiven Zerfällen. Im Zweiten (Nr. 705) soll die Reichweite der bei α-Zerfällen emittierten Strahlung in Luft untersucht werden.

2 Theoretische Hintergründe

2.1 Der radioaktive Zerfall

Der Zerfall instabiler Teilchen ist ein statistischer Vorgang. Das bedeutet, dass Voraussagen (z.B. über den Zeitpunkt eines Zerfalls) nur bei einer sehr großen Zahl N von Teilchen gemacht werden können. Zudem haben solche Voraussagen stets nur eine Wahrscheinlichkeit W < 1.

Diese Wahrscheinlichkeit, einen Zerfall zu beobachten, wird größer je länger der Beobachtungszeitraum ist:

$$dW = \lambda dt \tag{1}$$

λ wird als Zerfallskonstante bezeichnet und ist eine materialspezifische Konstante. Diese Gleichung enthält keine explizite Zeitabhängigkeit, was beudeutet, dass es keine Rolle spielt, wann die Beobachtung beginnt.

Da alle Teilchen unabhängig voneinander zerfallen, gilt für die Zahl der im Zeitraum dt zerfallenden Teilchen

$$dN = -NdW \tag{2}$$

und damit

$$dN = -\lambda N dt. \tag{3}$$

Dies ist das sogenannte ”radioaktive Zerfallsgesetz”. Unter der oben erwähnten Annahme eine sehr große Zahl von Teilchen zu betrachten folgt durch Integration angenähert

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \tag{4}$$

mit N(t) = Zahl der zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallenen Teilchen und N(0) = Zahl der bei t=0 vorhandenen Teilchen.

Betrachtet man den Fall $\Delta N \ll N$ unter der Annahme N(t) = const., dann folgt, dass die Zahl ΔN der in einem endlichen Zeitraum Δt zerfallenden Teilchen (ungefähr) konstant sein sollte.

Experimente zeigen jedoch Abweichungen von Gleichung (3). Um eine gute Übereinstimmung mit (3) zu erreichen muss man eine große Zahl von Messungen durchführen und das arithmetische Mittel bilden.

Besonders von Interesse ist in dem vorliegenden Experiment, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, mit der ein bestimmtes Ereignis ΔN in Abhängigkeit von N und λ auftritt. Unter der Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeit p für einen radioaktiven Zerfall gering und die Zahl der vorhandenen Teilchen groß und über den Messzeitraum (nahezu) unveränderlich ist, kann die Poisson-Verteilung das Ergebnis beschreiben. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Messereignisses k:= ΔN ist dann

$$P_{pN}(k) = e^{-pN}\frac{(pN)^k}{k!}. \tag{5}$$

Der Parameter pN ist hierbei gleich dem Erwartungswert der Verteilungsfunktion. Also ist

$$\bar{k} := pN = \lambda N \Delta t \tag{6}$$

die mittlere Ergebnisrate des Teilchenzerfalls.

Die Varianz der poisson-Verteilung ist gegeben durch

$$\sigma_p^2 = \bar{k}. \tag{7}$$

2.2 α-Teilchen

α-Teilchen bestehen aus zwei Protonen und zwei Neutronen - sie sind also wie ein Heliumkern aufgebaut. Das besondere an diesem HE-Kern ist die aussergewöhnlich hohe Bindungsenergie von 28,3 MeV.

2.2.1 Der α-Zerfall

Um die Vorgänge bei einem α-Zerfall - also der Emission eins α-Teilchen aus einem schweren, instabilen Kern - zu verstehen, betrachtet man zunächst den Potentialverlauf eines Atomkerns. Angenähert gilt die Darstellung in Abb. 1.

Im äußeren Bereich (r > r_0) des Kerns sind Coulomb-Kräfte ausschlaggebend und das Potential fällt $\propto \frac{1}{r}$ ab. Im inneren Bereich (r < r_0) überlagern die wesentlich stärkeren Kernkräfte die ladungsbedingte Abstoßung.

Nach der klassischen Betrachtungsweise kann ein Teilchen aus dem Potentialtopf, den der Kern darstellt, entkommen, wenn seine Energie größer als die Potentialbarriere ist. Dies kann aber keine vollständige und richtige Beschreibung sein, da die bei natürlichen α-Strahlern beobachteten Energien deutlich unterhalb der Coulomb-Energie im Fall des $^2 41Am$-Kerns von 29,3 MeV liegen.

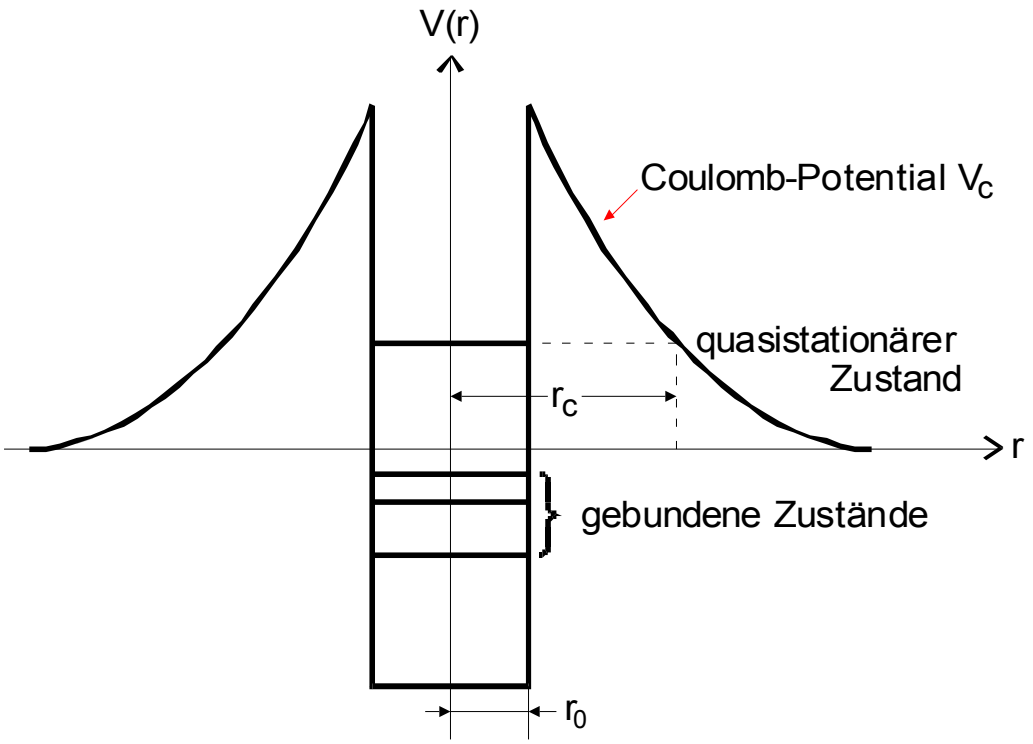


Abbildung 1: Vereinfachter Verlauf des Kernpotentials in einer Dimension (nicht maßstäblich)

wobei, $r_0 \approx 1,5 \cdot 10^{-15}\sqrt{_3Mm}$ und $r_c - r_0$ die Tunnellänge ist.

Den Schlüssel stellt hier die Quantenmechanik dar. Nach dieser gibt es eine kleine aber endliche Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen ausserhalb des Coulombwalles anzutreffen. Diese wird durch Wellenfunktion und Schrödingergleichung beschrieben. Es gilt

$$W_T \approx exp\left[-\frac{2d}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha(V_0-E)}\right]. \tag{8}$$

wobei, $\lambda_{deBroglie} << r_c - r_0$.

Neben dieser Tunnelwahrscheinlichkeit W_T ist für die Emissionswahrscheinlichkeit W_E noch die Wahrscheinlichkeit W_B für die Bildung eines α-Teilchens im Kern zu berücksichtigen. Ein Maß für W_B ist die leicht messbare Halbwertszeit $T_{1/2}$, die sich umgekehrt proportional zu W_E verhält. Empirisch findet man die sogenannte Geiger-Nutallsche Regel

$$\log T_{1/2} \propto 1/\sqrt{E}. \tag{9}$$

2.2.2 Wechselwirkung mit Materie

Wenn α-Teilchen in Materie eindringen kommt es zu zweierlei Effekten:

1. Kernfeld
   Einerseits findet Streuung an den Coulomb-Feldern der Kerne statt. In diesem Fall gilt eine $sin^{-4}\vartheta/2$-Abhängigkeit, so dass die Richtungsänderungen meist nur gering sind. Auch die Energieabnahme ist hierbei vernachlässigbar klein, beim sogenannten elastischen Stoß.

2. Ionisation
   Andererseits wechselwirken die α-Teilchen mit den Elektronen der Atomhülle. Da sie eine positive Ladung von zwei Elementarladungen besitzen, können die α-Teilchen Elektronen durch ihr Coulomb-Feld aus ihrer Umgebung entfernen. In Luft können so größenordnungsmäßig 10^5 Ionisierungen ablaufen bis die Energie eines α-Teilchens verbraucht ist.

2.2.3 Reichweite

Da die Bahnen der Teilchen recht geradlinig sind, kann man die Reichweite D der α-Strahlung in Materie, durch das Geigersche Reichweiten-Gesetz

$$D = 0,32E^{\frac{3}{2}} \tag{10}$$

ausdrücken (mit D in cm, E in MeV), welche die Reichweite mit der Energie verknüpft. Die Zahl der Teilchen aufgetragen gegen die Weglänge für Energieen zwischen 3 und 10 MeV, ist in Abb. 2 dargestellt.

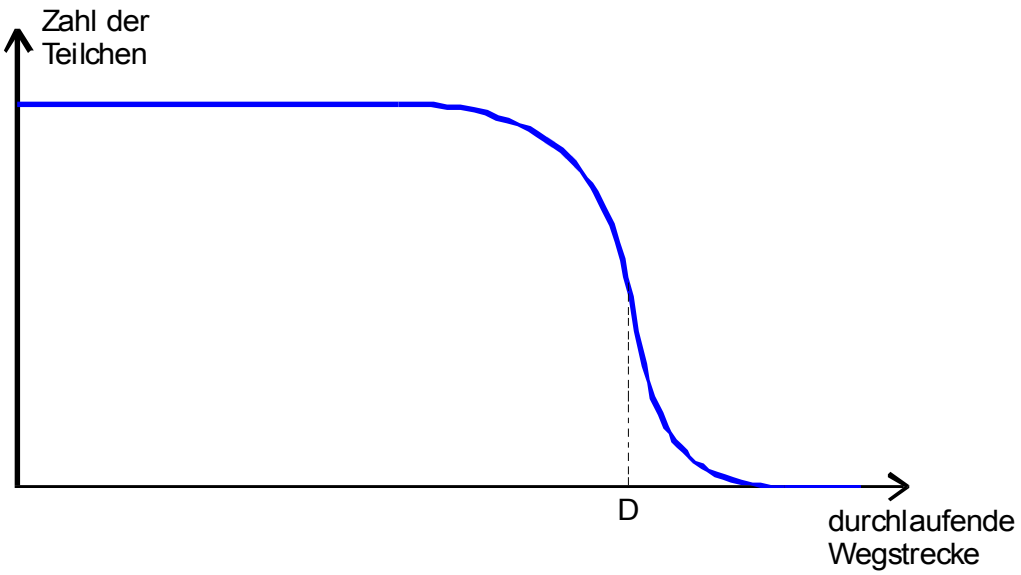


Abbildung 2: Reichweitenkurve von α-Teilchen in einem Gasvolumen

Der kurvenartige, stetige Verlauf ist darauf zurückzuführen, dass die Zahl der Gasmoleküle, die einem Teilchen begegnen, infolge der Brownschen Molekularbewegung statistisch verteilt ist.

Der spezifische Energieverlust dE/dx der α-Teilchen pro Weglänge ist proportional zur Dichte ρ des Gases. Diese ist wiederum proportional zum Druck p, wenn man die ideale Gasgleichung voraussetzt. Wie oben angemerkt, wird die Energie im Wesentlichen durch Ionisationsakte aufgebraucht, so dass die Anzahl der gebildeten Ionen proportional zum Gasdruck p ist. Variiert man bei konstanter Größe der Ionisationskammer (und damit zur Verfügung stehender Weglänge) den Druck, so wird ein Wert p' erreicht, bei dem die Kammerlänge L gleich der Reichweite der Strahlung ist. Unter Normalbedingungen gilt damit

$$D_0 = \frac{\rho}{\rho_0} L = \frac{p' T_0}{p_0 T} L \tag{11}$$

Siehe zur Veranschaulichung auch Abb.3.

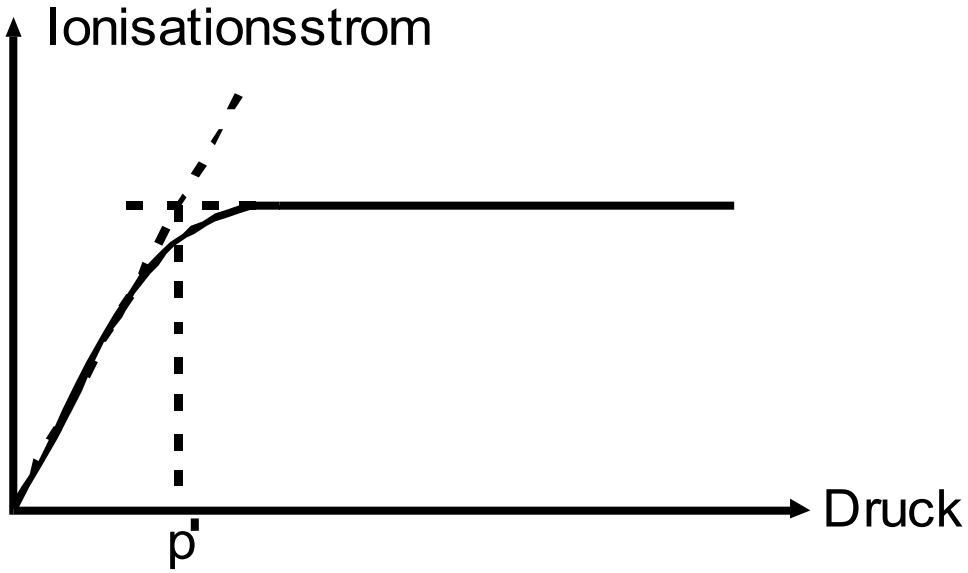


Abbildung 3: Abhängigkeit des Ionisationsstromes vom Druck in der Ionisationskammer

3 Durchführung und Auswertung 701

Nach Abb. 4 wurde die Schaltung aufgebaut, welche die Messergebnisse von 1000 Messungen, die jeweils eine Sekunde dauern, zum Rechner überträgt.

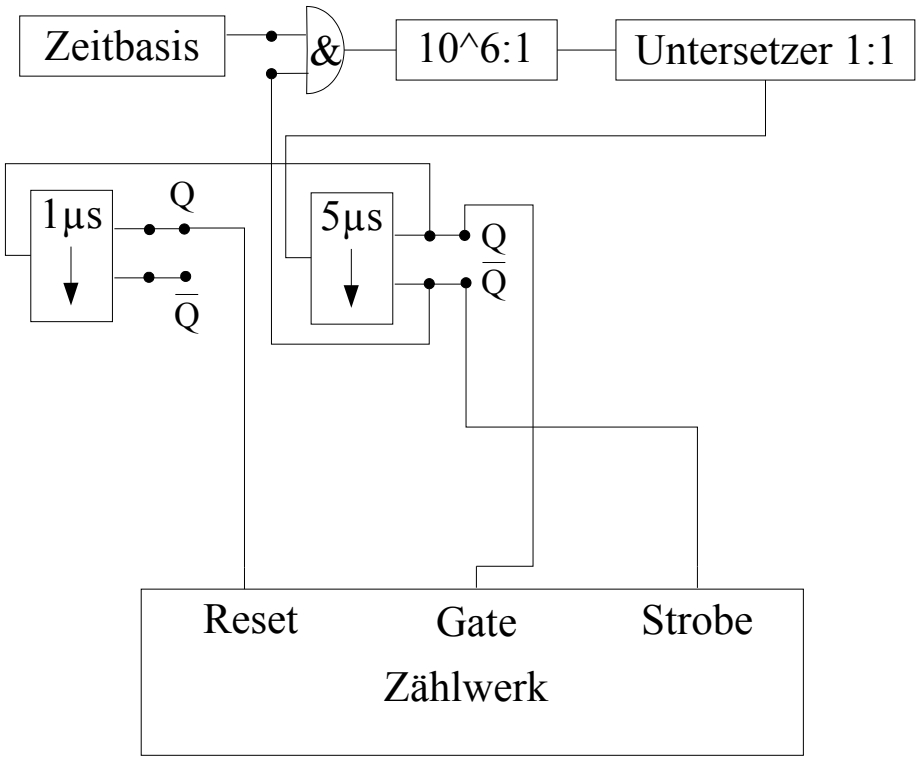


Abbildung 4: Aufbau der Schaltung für Versuch 701

Die Anzahl der Zerfälle in Abhängigkeit zur Häufigkeit ist in Diagramm 8 aufgetragen. Eine gemessene Zerfallszahl von 72 Kernen in einer Sekunde haben wir ausgelassen, da dieser durch Ausschalten einer benachbarten Apparatur nachweislich entstand. Das arithmetische Mittel haben wir daher neu zu 9,385 berechnet. Auch den Fehler haben wir überprüft, aber in den für uns wesentlichen Stellen ändert sich dort nichts.

Nun berechnen wir die Anzahl der noch nicht zerfallenen Kerne am Tage der Durchführung. Dazu benötigen wir das radioaktive Zerfallsgesetz aus (3) und for-

men es entsprechend um:

$$N_0 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{dN}{dt} * \quad (12)$$

$$N_0 = \frac{A}{\lambda} \quad (13)$$

Während unserer 999 Messungen sind Z = 9376 Kerne zerfallen, somit ergibt sich N_0 zu $6,88 \cdot 10^{11}$. Weiterhin berechnen wir die Wahrscheinlichkeit p, dass ein instabiler Kern im Zeitraum von einer Sekunde zerfällt zu $p = 1,37 \cdot 10^{-11}$. Mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeit können wir nun ausrechnen, wie viele Kerne am Anfang der Messung zerfallen und ob sich dies gegenüber dem Ende der Messung ändert. Wir erhalten für ΔN vor der Messung:

$$\Delta N_{vor} = W_z N(t)$$
$$\Delta N_{vor} = 9,45$$

Damit ist ΔN vor der Messung sehr klein gegenüber N. Nehmen wir eine Versuchsdauer von einer Stunde an, so ergibt sich ΔN auch zu 9,45, womit sich dieser Wert während des Versuchs nicht wesentlich ändert. Die Aktivität ist nach

$$A \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

von $1,1 \cdot 10^5 s^{-1}$ um $5,5 \cdot 10^{-3} s^{-1}$ auf 109999 s^{-1} gefallen, wodurch die vorherige Aussage nochmal bestätigt wurde.

Weiterhin wurde das arithmetische Mittel $\bar{k}$ zu 9,385($\pm 0,097$) bestimmt. Die mittlere Stichprobenstreuung

$$s^2 = \frac{1}{z-1} \sum_{k=k_1}^{k_2} \left(k - \bar{k}\right)^2 B(k)$$

ergibt sich zu 9,435. Somit besteht nur eine Abweichung von 0,5% zwischen $\bar{k}$ und der mittleren Stichprobenstreuung. Da bei einer Poissonverteilung diese beiden größen übereinstimmen, scheint unsere Messung nah an einer solchen Verteilung zu liegen. Um diese These zu festigen, überprüfen wir, wieviel Prozent der Messergebnisse im Intervall $\{\bar{k} - \sqrt{\bar{k}}, \bar{k} + \sqrt{\bar{k}}\}$ liegen. Dies ist bei uns der Bereich von k = 6 bis k = 13 und es ergibt sich für den Versuch ein Wert von 79,98% und für die Poisson Verteilung ein Wert von 81,01%. Es ergibt sich somit eine Differenz von 1,03 %, welche sehr klein ist. Nun wird in das Diagramm von unseren Messwerten noch die Poisson-Verteilung eingetragen und man hat einen Vergleich zwischen den gemessenen Verteilung und der theoretisch vorhergesagten Poisson-Verteilung (Diagramm 9).

Abschließend soll ein χ^2-Test durchgeführt werden, um zu prüfen, ob sich das Messergebniss wirklich durch eine Poisson-Verteilung darstellen lässt. Allgemein berechnet man χ,welches eine Testgröße ist, über die man die experimentellen Werte, mit der angenommenen Poisson-Verteilung vergleichen kann, folgendermaßen:

$$\chi^2 := \sum_{i=k}^{K} (\frac{B_i - T(x_i))^2}{\sigma^2(x_i)}$$

mit $B(x_i)$ = die gemessene relative Häufigkeit des Ergebnisses x_i, $T(x_i)$ = Wert der postulierten Verteilungsfunktion an der Stelle x_i und $\sigma^2(x_i)$ = Varianz der Verteilungsfunktion an der Stelle x_i. Da wir jedoch auf eine Poisson-Verteilung prüfen, können wir dies vereinfachen. Da die Varianz gleich dem Erwartungswert ist und T(x_i) durch np_i zu ersetzen ist, können wir χ folgendermaßen berechnen:

$$\chi^2 = \sum_{i=k}^{K} (\frac{B_i - np_i)^2}{np_i}$$

Hierbei bezeichnet der Index i das i-te Messergebniss, n die Gesamtanzahl der Messungen und P_i die über die Poissonverteilung vorhergesagte Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses.

chi^2 folgt nun einer speziellen Verteilung, welche nur von einem Parameter, dem sogenannten Freiheitsgrad, abhängig ist. Der Freiheitsgrad hängt von der Anzahl der verschiedenen Ergebnisse ab, welche mindestens 5 Messwerte beinhalten, damit der χ^2-Test zuverlässig funktioniert. Der Freiheitsgrad berechnet sich in unserem Fall wie folgt:

$$\mu = K - 2$$

, wobei K die Anzahl der verschiedenen Ereignisse beträgt. Die Ergebnisse, bei denen weniger als 5 Zerfälle gemessen wurden, haben wir zusammengelegt und somit ist bei uns K = 19 und $\mu = 17$. Für χ^2 erhalten wir somit einen Wert von 5,69. Aus einer Tabelle[1] ließt man nun eine entsprechende Wahrscheinlichkeit χ^2_S ab und diese ist in unserem Fall > 99%. Somit müssen wir die Hypothese, dass der statistische Zerfall von α-Teilchen einer Poissonverteilung gleicht, nicht verwerfen.

4 Durchführung und Auswertung 705

Als Quelle für α-Strahlung wird Am^{241} verwendet.

Zum Nachweis der α-Strahlung wird eine Ionisationskammer (Länge L = 9,0 cm) verwendet, wie man auch aus Abb. 5 entnehmen kann.

[1] hier das Fehlerrechnungsscript von Herrn Finke

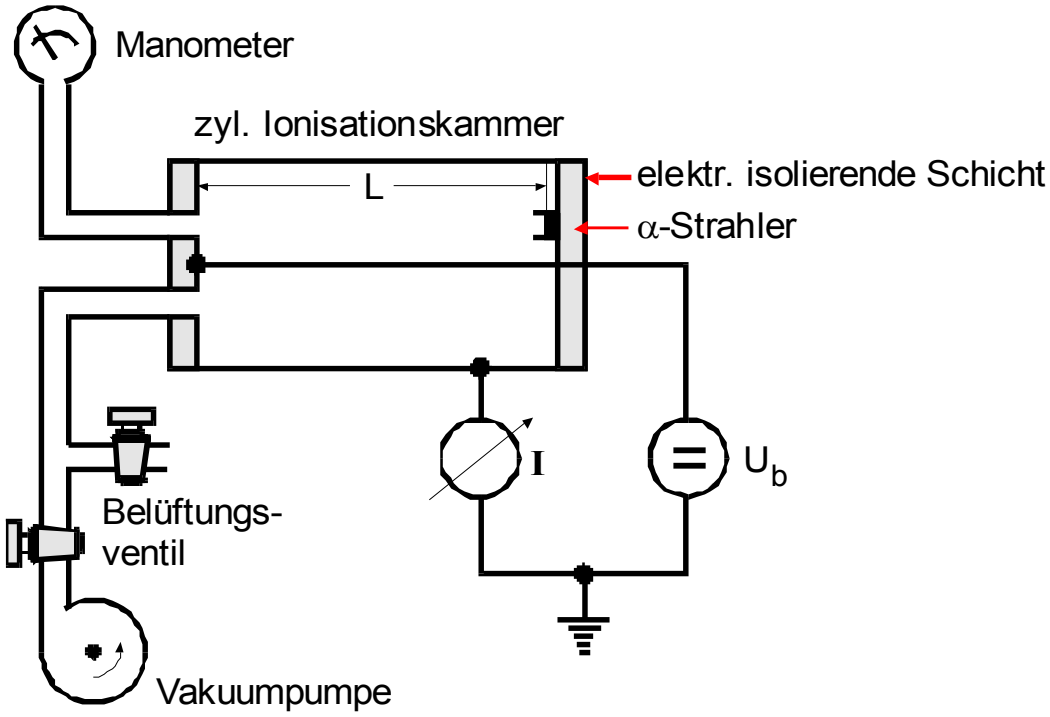


Abbildung 5: Schematische Darstellung der verwendeten Messaparatur

Zunächst wird bei normalem Luftdruck eine Strom-Spannungs-Charakteristik aufgenommen, um eine für die späteren Messungen geeignete Spannung zu ermitteln. Hierfür wird die Spannung variiert und der jeweils zugehörige Ionisationsstrom an dem sehr empfindlichen Amperemeter abgelesen. Leider ließ sich am Amperemeter der Nullabgleich nicht sehr gut durchführen - ohne anliegende Spannung wurde ein geringer Strom angezeigt; der Zeiger schwankte jedoch, so dass sich kein genauer offset-Wert ablesen ließ. Die Temperatur betrug T = 23,9°C. Die Messwerte sowie eine grafische Darstellung finden sich unter Tab. 1 bzw. Abb. 6 im Anhang.

Nun soll die Reichweite der α-Strahlung ermittelt werden. Dazu wird bei einer Spannung U = 800 V der Ionisationsstrom in Abhängigkeit vom Druck gemessen. Die Temperatur lag zu diesem Zeitpunkt bei T = 24°C = 297 K. Die Messwerte sind tabellarisch im Anhang in Tab. 2 aufgeführt.

Aus den Gleichungen der beiden Ausgleichsgeraden in Abb. 7

$$y = 0,866(\pm 0,003) + 1,05 \cdot 10^{-4}(\pm 0,05 \cdot 10^{-4})x \text{ "waagerecht"}$$

$$y = -0,043(\pm 0,008) + 0,0031(\pm 0,0001)x \text{ "senkrecht"}$$

(Angaben aus Origin 6.0)
ergibt sich p' zu 303,9(± 6,6) mbar. Mit $T_0 = 273\text{K}$ und $p_0 = 100000\text{Pa}$ ist somit nach (11) die Reichweite der α-Strahlung unter Normalbedingungen

$$D_0 = \frac{30394Pa \cdot 273K}{100000Pa \cdot 297K} \cdot 0,09m = 0,025(\pm 0,001)m.$$

Hiermit ergibt sich nach (10) für die Energie der α-Teilchen (mit D in cm):

$$E = \sqrt[3]{\frac{2,5^2 cm}{0,32^2}} = 3,96(\pm 0,09)MeV$$

Damit ergibt sich für die Anfangsgeschwindigkeit (also vor der Beschleunigung im Coulomb-Feld) ein Wert von

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,35 \cdot 10^{-13}J}{6,65 \cdot 10^{-27}Kg}} \approx 13,8 \cdot 10^6(\pm 0,3)\frac{m}{s}.$$

Um nun den Radius r_c (vgl. Abb. 1) abzuschätzen setzen wir die soeben berechnete Energie für das Potential ein und vernachlässigen damit das zusätzlich vorhandene Potential, da dieses schnell mit 1/r abfällt:

$$E_\alpha(r_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ze_0^2}{r_0}$$

Nach r aufgelöst ergibt sich

$$r_c \approx \frac{-ze_0}{4\pi\varepsilon_0 E} \approx \frac{-2\cdot 93\cdot e_0}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 3,96\cdot 10^6 eV} \approx 6,77\cdot 10^{-14} m.$$

Ein Vergleich mit dem nach

$$r_0 \cong 1,5\cdot 10^{-15}\sqrt[3]{241} \approx 9,31\,fm$$

gerechneten Wert für den Radius, bis zu dem die Kernkräfte überwiegen, zeigt nur eine Abweichung von einer Größenordnunge. Für die Tunnellänge ist der "Kernradius" r_0 also nur von kleiner Bedeutung.

Die Tunnel-Länge beträgt also nach den o.a. Werten

$$l_T = r_0 - r_c \approx 9,31\,fm - 67,7\,fm \approx 58,39\,fm \approx r_c.$$

5 Anhang

U [V]	I [nA]
150	0,75
200	0,83
250	0,88
300	0,91
350	0,93
400	0,94
450	0,95
500	0,96
550	0,96
600	0,965
650	0,97
700	0,97
750	0,97
800	0,97
850	0,975
900	0,975
950	0,975
1000	0,975
1050	0,98
1100	0,98

Tabelle 1: Messwerte der Charakteristik

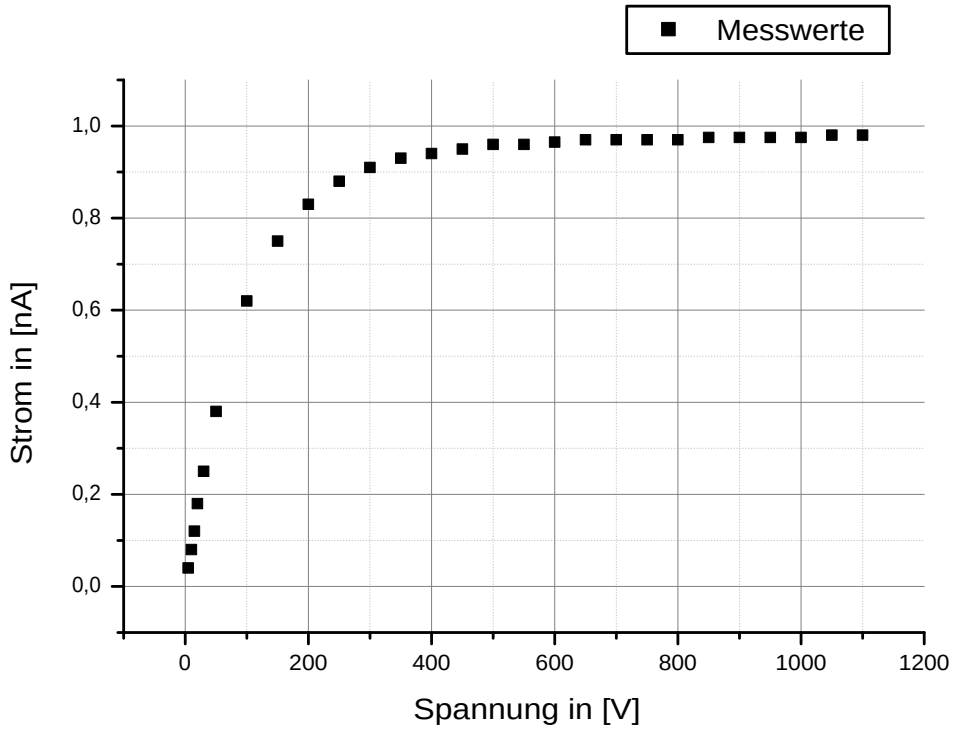


Abbildung 6: Charakteristik der Ionisationskammer

p [mbar]	I [nA]
50	0,12
70	0,17
80	0,21
100	0,26
125	0,34
155	0,43
180	0,51
200	0,59
250	0,76
300	0,86
350	0,89
400	0,9
450	0,91
500	0,92
600	0,93
700	0,94
800	0,95
900	0,965
990	0,97

Tabelle 2: Messwerte für Ionisationsstrom in Abhängigkeit vom Druck

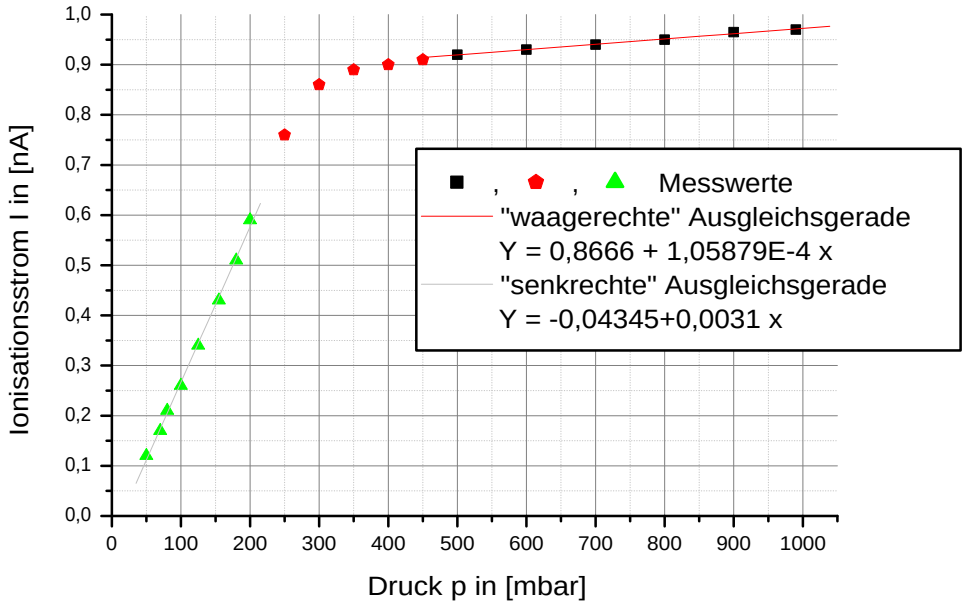


Abbildung 7: Ionisationsstrom in Abhängigkeit vom Druck

Zerfälle	Häufigkeit	rel.	Poisson
0	0	0.0000	0.0001
1	1	0.0010	0.0007
2	4	0.0040	0.0035
3	13	0.0130	0.0110
4	24	0.0240	0.0260
5	48	0.0480	0.0493
6	56	0.0561	0.0776
7	132	0.1321	0.1049
8	151	0.1512	0.1240
9	130	0.1301	0.1303
10	109	0.1091	0.1232
11	103	0.1031	0.1059
12	69	0.0691	0.0835
13	49	0.0490	0.0607
14	52	0.0521	0.0410
15	20	0.0200	0.0259
16	19	0.0190	0.0153
17	11	0.0110	0.0085
18	5	0.0050	0.0045
19	3	0.0030	0.0022
20	0	0.0000	0.0011

Tabelle 3: Messwerte zur Statistik von radoaktivem Zerfall

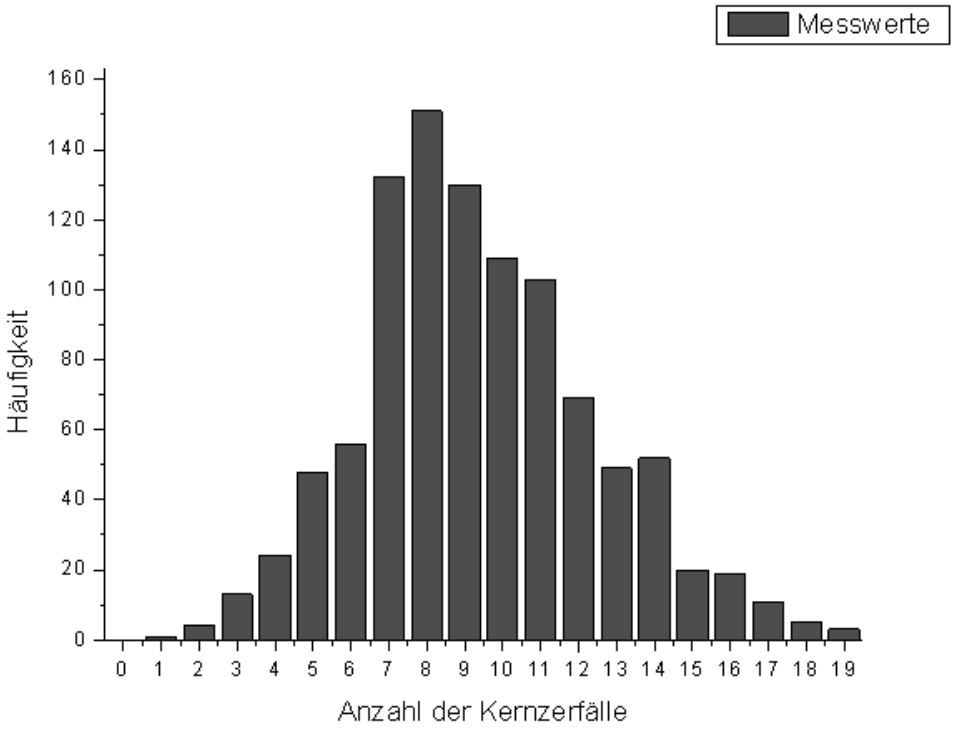


Abbildung 8: Unsere Messwerte

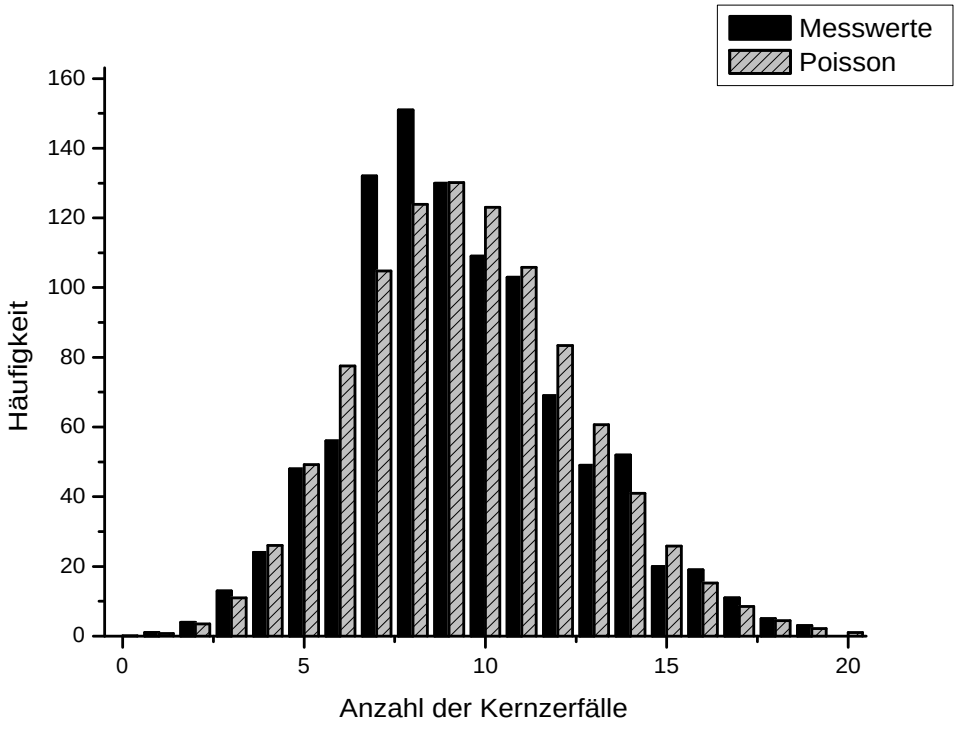


Abbildung 9: Unsere Messwerte + Poisson-verteilung