Praktikumsprotokoll

Versuch Nr. 407
Fresnelsche Formeln

Frank Hommes
und
Kilian Klug

Durchgeführt am:
18 Mai 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Theoretische Hintergründe **3**
2.1 Polarisation senkrecht zur Einfallsebene 5
2.2 Polarisation parallel zur Einfallsebene 6

3 Durchführung **7**

4 Auswertung **9**
4.1 Berechnung von n aus den Fresnelschen Formeln 9
4.2 Abhängigkeit n von α 10
4.3 Ermittlung von α_p und n aus dem Messwerte-Diagramm 11

5 Anhang **11**

1 Einleitung

In diesem Versuch geht es um Brechung und Reflexion, die auftreten, wenn Licht auf eine Grenzfläche zweier Materialien mit unterschiedlichen Brechungsindizes n_i trifft. Dabei werden im Folgenden nur nicht-ferromagnetische und nicht elektrisch leitende Materialien betrachtet(d.h. μ = 1 und $\vec{j}$=0).

Ziel ist es die Abhängigkeit der Intensität der reflektierten Lichtestrahles vom Einfallswinkel sowie der Polarisationsrichtung zu erfassen.

2 Theoretische Hintergründe

Da Licht - das heißt eine elektromagnetische Welle - betrachtet wird, geht man von den Maxwellschen Gleichungen

$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon\varepsilon_0\dot{\vec{E}} \tag{1}$$

und

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\mu\mu_0\dot{\vec{H}} \tag{2}$$

aus. Hierin bedeuten $\vec{E}$ und $\vec{H}$ die elektrische bzw. magnetische Feldstärke, $\vec{j}$ die Stromdichte, ε die relative Dielektrizitätskonstante und μ die Permeabilität des Mediums, ε_0 die Influenzkonsante und μ_0 die Induktionskonstante.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass in einem elektromagnetischen Feld die elektrische Energie pro Volumeneinheit W_{el} gleich der magnetischen Energie pro Volumeneinheit W_{mag} ist, also

$$W_{el} := \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}^2 = \frac{1}{2}\mu_0\vec{H}^2 =: W_{mag} \quad , \tag{3}$$

findet man den sogenannten Poynting-Vektor $\vec{S}$. Dieser gibt die Strahlungsleistung pro Fläche an und ist definiert durch

$$\vec{S} = \vec{E}\,\text{x}\,\vec{H}$$

bzw.

$$\left|\vec{S}\right| = \text{v}\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}^2 \tag{4}$$

mit v = Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes.

Ebenfalls aus den Maxwellschen Gleichungen kann man die sogenannte Maxwellsche Relation

$$n^2 = \varepsilon \tag{5}$$

ableiten. Für den Brechungsindex n gilt ausserdem die Beziehung

$$n = \frac{c}{v} \tag{6}$$

mit c = Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.
Fällt nun eine ebene Welle aus dem Vakuum (Amplitude E_e) unter einem Winkel α auf eine Grenzfläche, wird ein Teil (Amplitude E_r) reflektiert, während ein anderer Teil (Amplitude E_d) in das Medium eindringt (siehe Abb.1). Das Strahl-

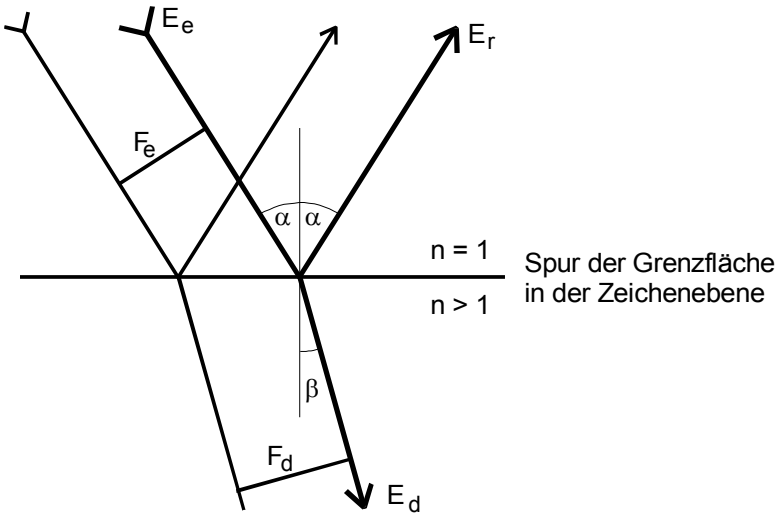


Abbildung 1: Reflexion und Brechung einer ebenen Welle*

bündel wird abgelenkt, da die Lichtgeschwindigkeit im Medium kleiner ist als im Vakuum. Dabei wird der Strahl zum Lot hin gebeugt, d.h. $\beta < \alpha$. Durch die Richtungsänderung ändert sich auch der Querschnitt F des Strahlenbündels. Somit gilt nach dem Energiesatz

$$S_e F_e = S_r F_e + S_d F_d$$

bzw.

$$S_e \cos\alpha = S_r \cos\alpha + S_d \cos\beta \quad . \tag{7}$$

Mit (4) und (6) erhält man daraus

$$\left(\vec{E}_e^2 - \vec{E}_r^2\right) n \cos\alpha = \varepsilon \vec{E}_d^2 \cos\beta \quad . \tag{8}$$

Da ε bei sichtbarem Licht kaum messbar ist wird es durch Anwendung von (5) elimiert:

$$\left(\vec{E}_e^2 - \vec{E}_r^2\right) \cos\alpha = n \vec{E}_d^2 \cos\beta \tag{9}$$

Um im Weiteren schließlich zu den Fresnelschen Formeln zu gelangen, muss an dieser Stelle eine Fallunterscheindung gemacht werden, die die Polarisationsrichtung des Lichtes berücksichtigt. Diese spielt eine Rolle, da sich nicht beide Komponenten des elektrischen Feldvektors $\vec{E}$ beim Durchgang durch eine Grenzfläche gleich verhalten. $\vec{E}$ wird deshalb in seine Komponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene zerlegt:

$$\vec{E}_e = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel$$

Die Einfallsebene wird dabei von einfallendem und reflektiertem Strahl aufgespannt.

2.1 Polarisation senkrecht zur Einfallsebene

Hier schwingt der $\vec{E}_\perp$-Vektor parallel zur Grenzfläche (vgl. Abb.2). Nur die Pa-

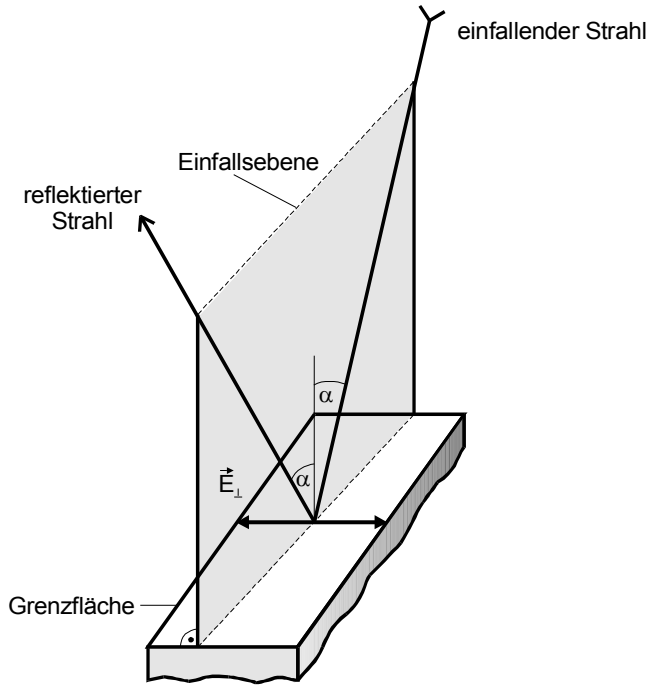


Abbildung 2: Reflexion an einer Grenzfläche ($\vec{E}$ senkrecht zur Einfallsebene)*

rallelkomponente von $\vec{E}$ (bzgl. der Grenzfläche) verhält sich beim Durchgang

durch die Grenzfläche der beiden Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes stetig. Aus der Stetigkeitsbedingung

$$\vec{E}_{tg_1} = \vec{E}_{tg_2}$$

folgt

$$\vec{E}_{e_\perp} + \vec{E}_{r_\perp} = \vec{E}_{d_\perp} \quad .$$

Damit gilt mit (9)

$$\vec{E}_{r_\perp} = -\vec{E}_{e_\perp} \frac{n\cos\beta - \cos\alpha}{n\cos\beta + \cos\alpha} \quad .$$

Unter Anwendung des bekannten Snelliusschen Brechungsgesetzes ergibt sich daraus

$$\vec{E}_{r_\perp}(\alpha) = -\vec{E}_{e_\perp} \frac{\left(\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \cos\alpha\right)^2}{n^2 - 1} \quad . \tag{10}$$

2.2 Polarisation parallel zur Einfallsebene

Nun soll die Komponente $\vec{E}_{\parallel}$ untersucht werden, die in der Einfallsebene schwingt (vgl. Abb.3). $\vec{E}_{\parallel}$ ist hier wiederum in eine parallele und eine senkrechte Kompo-

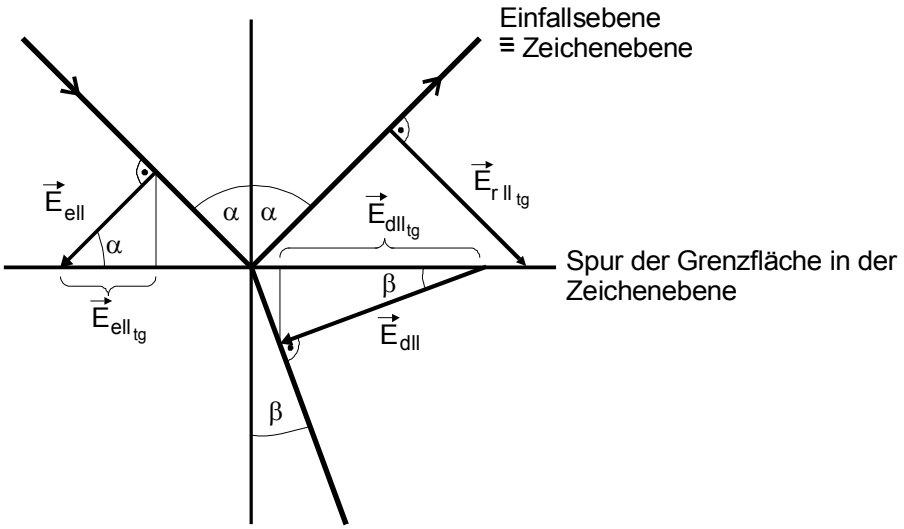


Abbildung 3: Reflexion an einer Grenzfläche ($\vec{E}$ parallel zur Einfallsebene)*

nente bzgl. der Grenzfläche zerlegt. Mit der Stetigkeitsbedingung

$$\vec{E}_{e_{\parallel tg}} + \vec{E}_{r_{\parallel tg}} = \vec{E}_{d_{\parallel tg}}$$

oder auch

$$(\vec{E}_{e_\parallel} - \vec{E}_{r_\parallel}) \cos\alpha = \vec{E}_{d_\parallel} \cos\beta$$

folgt aus (9)

$$\vec{E}_{r_\parallel} = \vec{E}_{e_\parallel} \frac{n\cos\alpha - \cos\beta}{n\cos\alpha + \cos\beta} \quad .$$

Analog zu oben folgt hier unter Verwendung des Snelliusschen Brechungsgesetzes

$$\vec{E}_{r_\parallel}(\alpha) = \vec{E}_{e_\parallel} \frac{n^2\cos\alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n^2\cos\alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \quad . \tag{11}$$

Von besonderem Interesse ist hier der Fall $\alpha + \beta = 90°$. Ist diese Bedingung erfüllt, so wird $\vec{E}_{r_\parallel} = 0$ und es folgt

$$\tan\alpha_p = n \quad . \tag{12}$$

Diesen speziellen Winkel α_p nennt man den Brewsterschen Winkel. Fällt ein Lichtstrahl unter diesem Winkel auf eine Grenzfläche, so dringt er komplett in das Medium ein und es findet keine Reflexion statt.

Die Gleichungen (10) und (11) nennt man Fresnelsche Formeln.

* alle Abbildungen entnommen aus dem Script zu Versuch 407 von S.Finke.

3 Durchführung

Das Experiment wird an der linken der beiden zur Verfügung stehenden Apparaturen durchgeführt.

Für beide Polarisationsrichtungen wird je eine Messreihe aufgenommen. Vor jeder Messreihe wird die Apparatur neu justiert.

Es wird eine Apparatur gemäß Abb.4 verwendet.

Als Lichtquelle wird ein He-Ne-Laser benutzt, der monochromatisches, linear polarisiertes Licht der Wellenlänge 633nm liefert. Der Laser ist dabei um die Längsachse drehbar gelagert, so dass die Polarisationsrichtung frei gewählt werden kann.

Die reflektierende Oberfläche besteht aus einem Silicium-Spiegel. Das Pho-

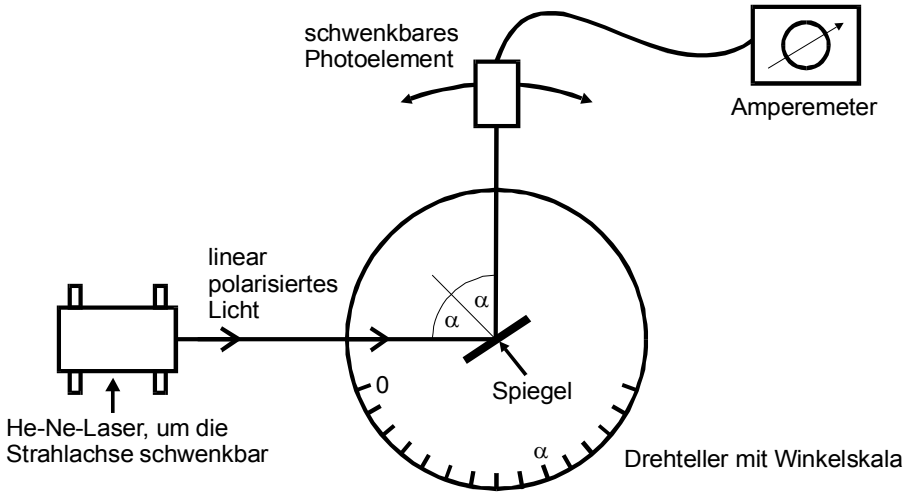


Abbildung 4: Schematische Darstellung der Messapparatur*

toelement liefert einen Strom, der proportional zur Intensität des eingestrahlten Lichtes ist. Da hier jedoch auch Nebeneffekte wie z.B. thermisches Rauschen einen Einfluss haben, wird zunächst (möglichst unter Versuchsbedingungen) der Dunkelstrom I_d gemessen, der ohne Lichtquelle ausgegeben wird.

$$I_{d1} = 2,0(\pm 0,5)\ \text{nA}$$

$$I_{d2} = 6,5(\pm 0,5)\ \text{nA}$$

Die Fehler sind hier abgeschätzt. Während des Experimentes waren keine konstanten Licht- und Temperaturverhältnisse gewährleistet, was die beiden recht unterschiedlichen Ergebnisse erklärt, da sie einige Zeit auseinander lagen. Beide Werte sind gegenüber den Messwerten jedoch vernachlässigbar und werden in der späteren Rechnung deshalb nicht berücksichtigt. Lediglich die minimalen Intensitäten mit Polarisationsfilter liegen in der gleichen Größenordnung, allerdings bewegt sich der Wert des Dunkelstromes auch hier innerhalb der Messungenauigkeit - oftmals war genaueres Ablesen z.B. aufgrund von schwankenden Zeigern der Messgeräte nicht möglich.

Als nächstes wird die Apparatur justiert. Zunächst wird die Probe (also der Si-Spiegel) aus dem Strahlengang entfernt um die maximale Intensität des Lasers zu ermitteln (bzw. die dazu proportionale Stromstärke).

$$I_{e1} = 0,62 \text{ mA}$$

$$I_{e2} = 0,54 \text{ mA}$$

Nun wird ein Polarisationsfilter in den Strahlengang gebracht und durch Drehen des Lasers eine Polarisationsrichtung eingestellt. Die bestmögliche Polarisation ist erreicht,wenn die minimale Intensität gemessen wird.

$$I_{min_\perp} = 13 \text{ nA}$$

$$I_{min_\parallel} = 22 \text{ nA}$$

Durch Schwenken des Detektorarmes von der 0° auf die 180° Stellung wird geprüft, ob der Lichtstrahl über den gesamten Messbereich innerhalb des Erfassungsbereiches des Photoelementes liegt. Gegebenenfalls wird dies durch nachjustieren erreicht.
Um den Laserstrahl auf die Goniometerachse zu justieren wird anstelle des Spiegels eine Zentriernadel eingesetzt und das Lasergehäuse vorsichtig in horizontaler Richtung verschoben, bis die Nadel den Strahl mittig teilt.
Mit eingesetztem Spiegel wird nun in 0°-Stellung sichergestellt, dass der Laserstrahl entlang des einfallenden Laserstrahls auf gleicher Höhe reflektiert wird.
Nach erfolgter Justierung beginnen wir nun mit der eigentlichen Messung, indem der Spiegel in 2°- bis 3°-Schritten gedreht und der jeweilige Photostrom abgelesen wird. Die so erhaltenen Messwerte sind tabellarisch im Anhang aufgeführt (siehe Tab.(1) und Tab.(2)).

4 Auswertung

4.1 Berechnung von n aus den Fresnelschen Formeln

Um aus den Messergebnissen den Brechungsindex n zu berechnen, werden die Gleichungen (10) und (11) nach n aufgelöst.

Für senkrechte Polarisation ergibt sich aus Gleichung (10)

$$n = \sqrt{1 - \frac{4E_{e_\perp}\cos^2\alpha}{E_{e_\perp} + E_{r_\perp}} + \frac{4E_{e_\perp}^2\cos^2\alpha}{(E_{e_\perp} + E_{r_\perp})^2}} \quad .$$

Für parallele Polarisation ergibt sich aus Gleichung (11)

$$n_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{E_{r_\parallel}+E_{e_\parallel}}{E_{r_\parallel}-E_{e_\parallel}}\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{E_{r_\parallel}+E_{e_\parallel}}{E_{r_\parallel}-E_{e_\parallel}}\frac{1}{\cos\alpha}\right)^4 - \left(\frac{E_{r_\parallel}+E_{e_\parallel}}{E_{r_\parallel}-E_{e_\parallel}}\right)^2 \tan^2\alpha}} \quad .$$

Für die Amplituden wird jeweils die Wurzel der ermittelten Stromstärken (die ja proportional zur Intensität sind) mit passend gewähltem Vorzeichen eingesetzt, also $E_{e_\perp} = -24,89$ und $E_{e_\parallel} = 23,4$. Die so aus den Messwerten erhaltenen Ergebnisse sind in Tab.3 und Tab.4 zu finden. Aus den einzelnen Werten von n ergeben sich die beiden Mittelwerte, wobei in den Tabellen eingeklammerte Werte wegen offensichtlicher systematischer Fehler nicht beachtet wurden:

$$\overline{n}_\perp = 3,67(\pm 0,15)$$

$$\overline{n}_\parallel = 4,16(\pm 0,05)$$

Die Fehler wurden über die Standardabweichung berechnet.

Mit dem zunächst falsch abgelesenen Wert von 6,2 mA für die maximale Stromstärke (Intensität) ergibt sich ein Mittelwert von 1,27 für den Brechungsindex, was offensichtlich unsinnig ist - wie uns vorher auch schon völlig klar war.

4.2 Abhängigkeit n von α

Um festzustellen, ob es eine (scheinbare) Abhängigkeit der n_i von α gibt tragen wir die beiden Größen jeweils gegeneinander auf (siehe Abb.6 und Abb.7im Anhang). Man erwartet keine Abhängigkeit zu finden, da n eine (konstante) Materialeigenschaft ist.
In Diagramm Abb.6 für die senkrechte Polarisation ist bei einem Winkel von 50° bis 53° eine Stufe zu erkennen, nach der die Werte fast durchgängig etwas niedriger liegen als bei kleineren Winkeln und damit zu Beginn der Messreihe. Hervorgerufen wird dies möglicherweise durch eine plötzliche Änderung der Versuchsbedingungen - etwa dem Ein- bzw. Ausschalten einer zusätzlichen Lichtquelle. Verwendet man zur Berechnung des Mittelwertes nur die höher liegenden Werte, so ergibt sich $n = (3,78 \pm 0,05)$, was etwas besser mit dem erwarteten Wert übereinstimmt.

Im Diagramm Abb.7 für parallele Polarisation ist im Rahmen der Messgenauigkeit ebenfalls keine deutliche Abhängigkeit festzustellen. Lediglich im Bereich des Brewster-Winkels zeigen sich etwas stärker vom Mittelwert abweichende Werte, was möglicherweise damit zusammenhängt, dass hier versucht wurde besonders viele Messpunkte aufzunehmen, wobei jedoch die Schwierigkeit auftrat, dass sich der Winkel nicht sehr exakt einstellen und ablesen ließ.

4.3 Ermittlung von α_p und n aus dem Messwerte-Diagramm

Trägt man die aufgenommenen Messwerte gegeneinander auf, so erkennt man in der Kurve für parallele Polarisation ein deutliches Minimum (siehe Abb.5 im Anhang). Dieses liegt zwar nicht wie die Theorie vorhersagt exakt bei Null, bezeichnet aber doch eindeutig den Brewster-Winkel α_p. Er beträgt nach unserer Messung 75,5°, womit sich der Brechungsindex n zu

$$n = \tan \alpha_p = 3,87$$

errechnet.
Mit den oben angegebenen Mittelwerten der Brechungsindizes sind zusätzlich Theoriekurven nach (10) und (11) eingezeichnet.

In Abb.8 und Abb.9 im Anhang ist jeweils $\sqrt{I(\alpha_i)/I_e}$ gegen α_i aufgetragen.

5 Anhang

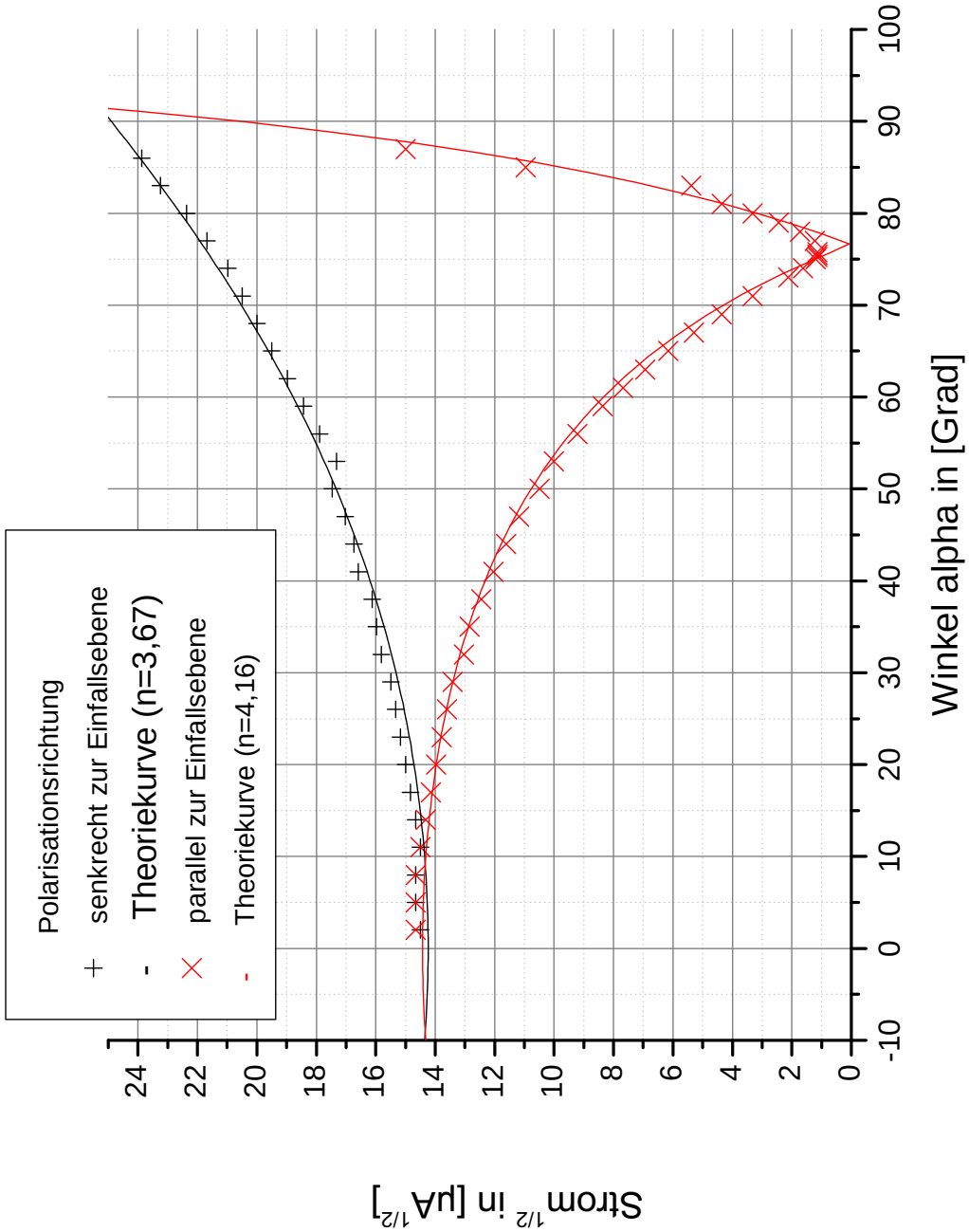


Abbildung 5: Messergebnisse und Theoriekurven

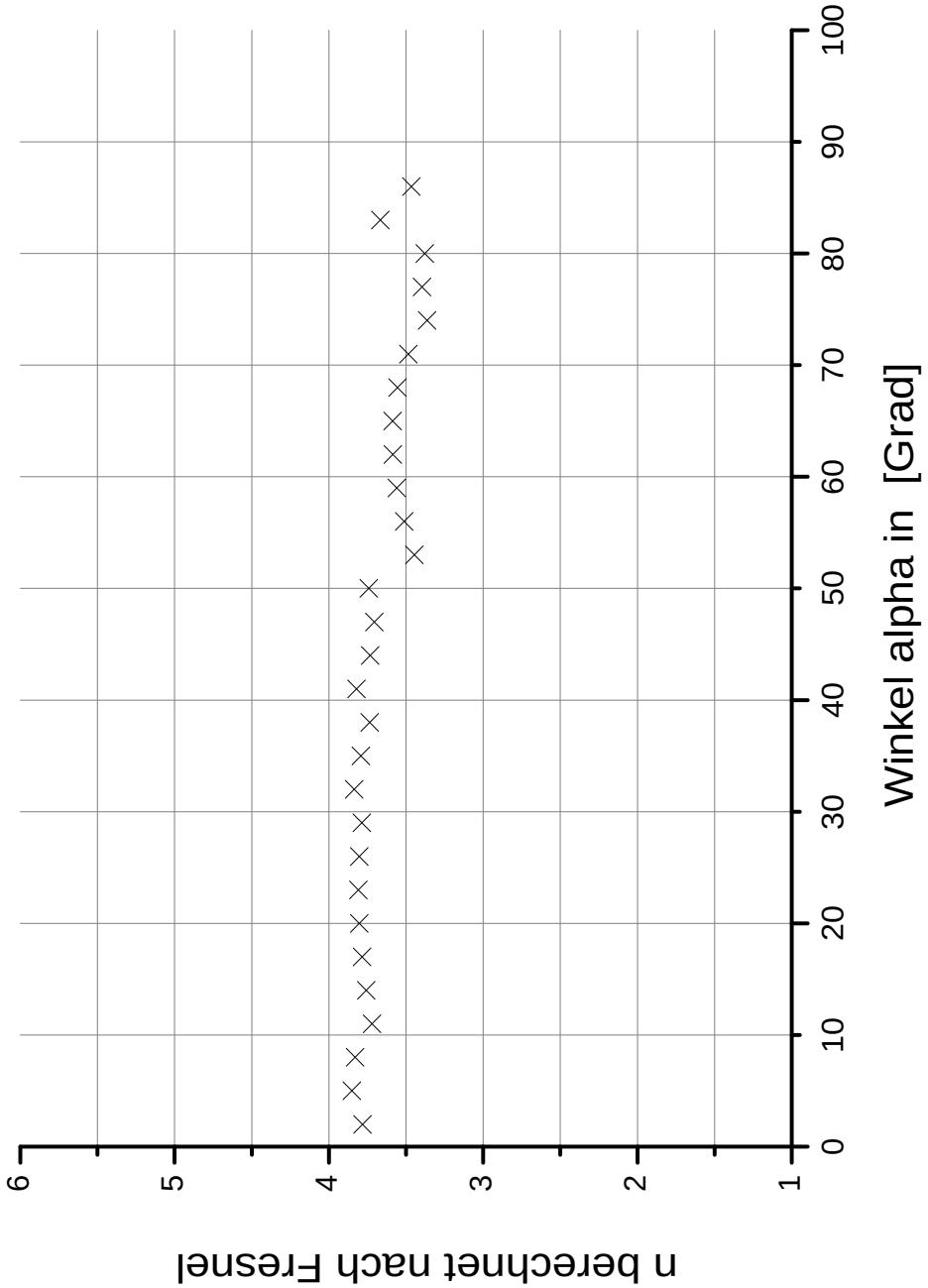


Abbildung 6: Abhängigkeit n_i von α bei senkrechter Polarisation

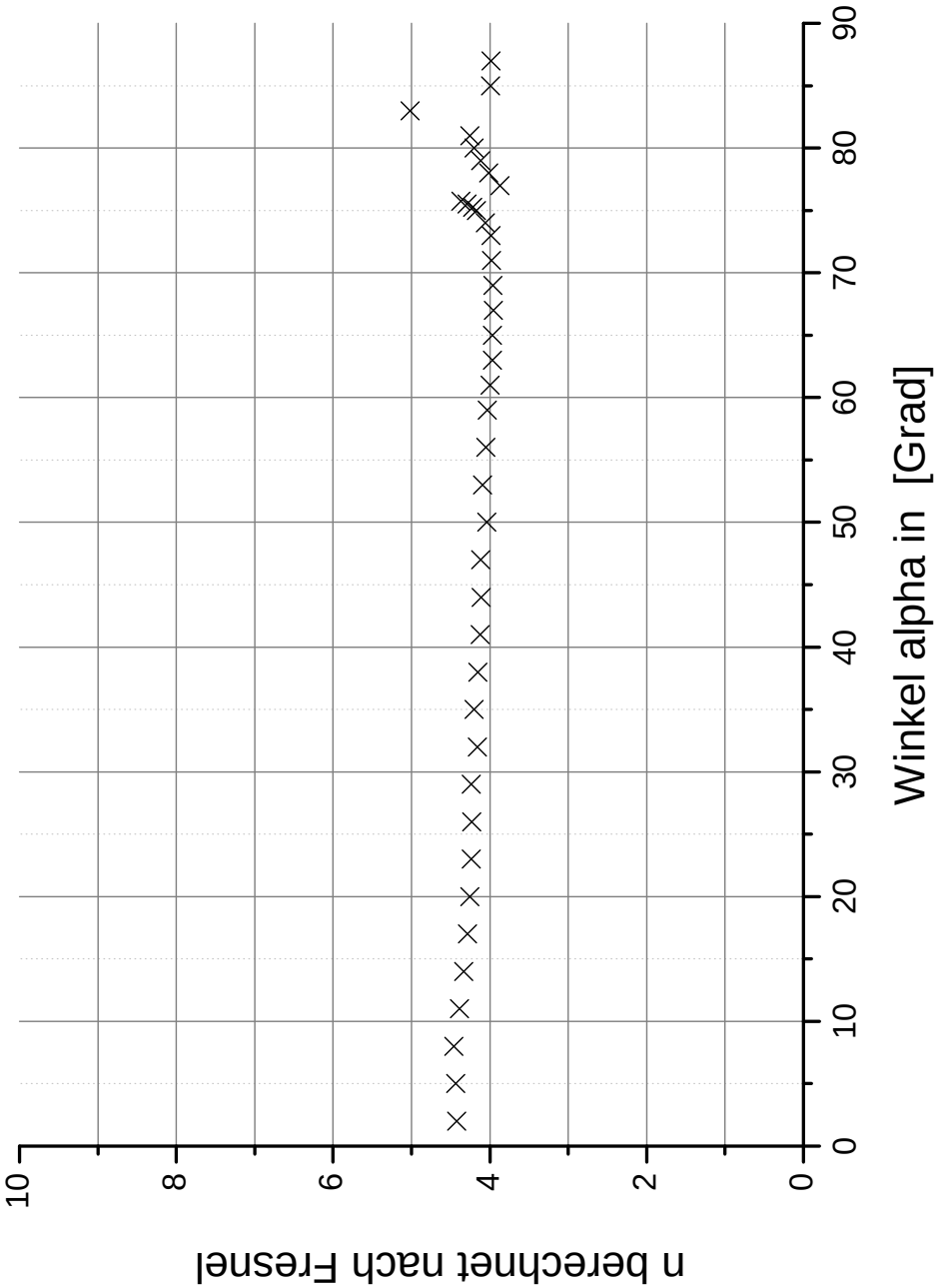


Abbildung 7: Abhängigkeit n_i von α bei paralleler Polarisation

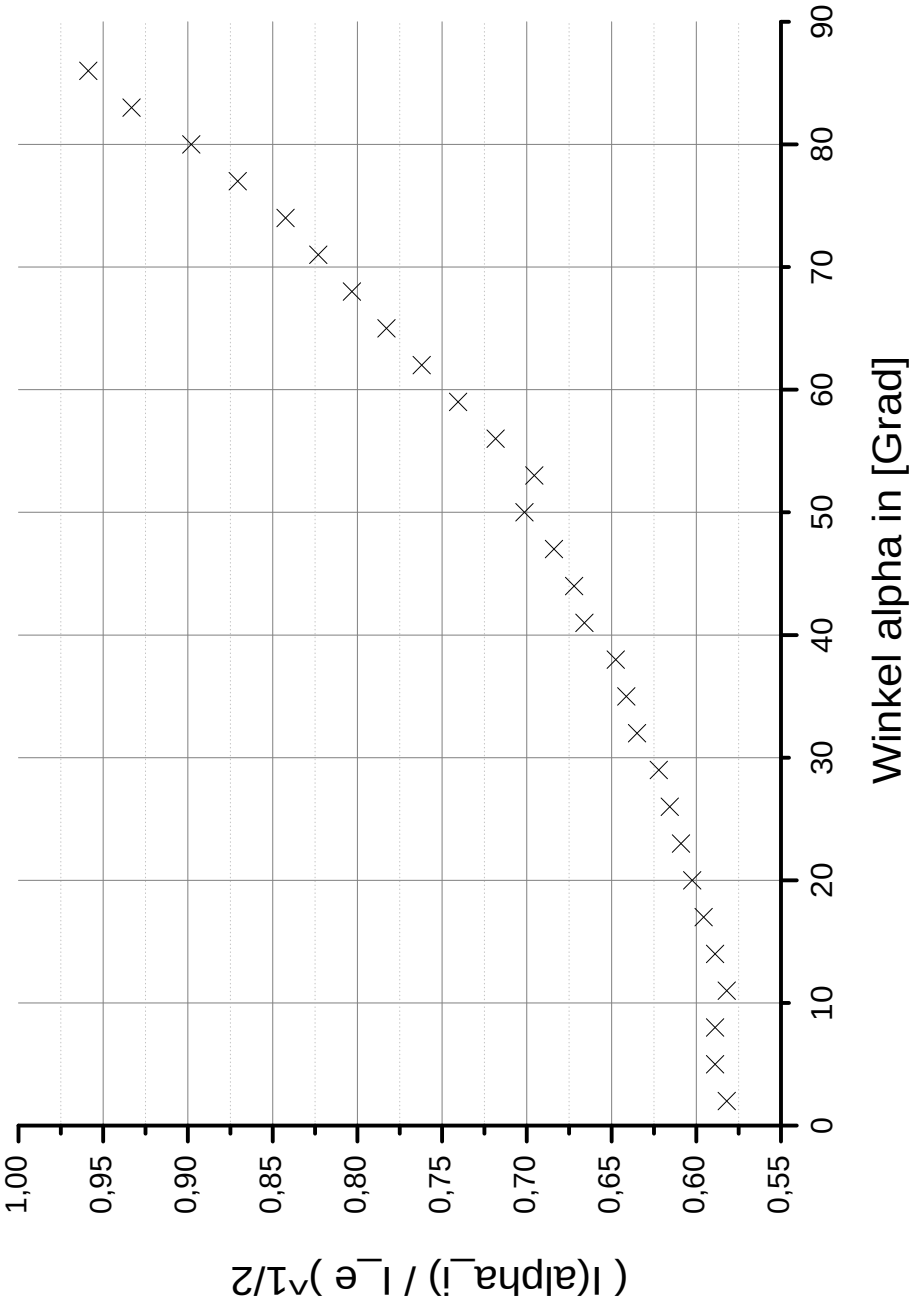


Abbildung 8: Diagramm für senkrechte Polarisation

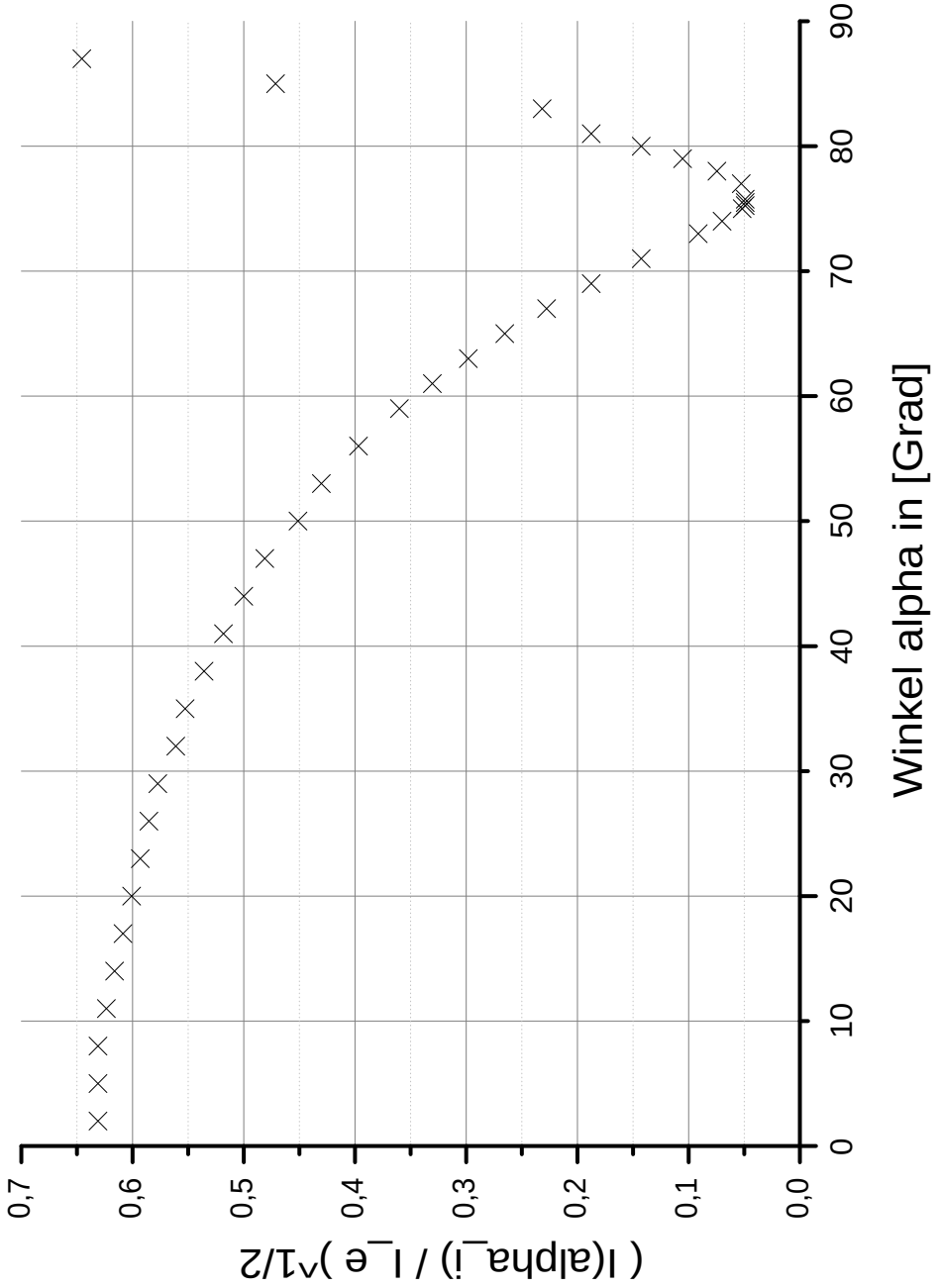


Abbildung 9: Diagramm für parallele Polarisation

Winkel [°]	Strom [μA]
2	210
5	215
8	215
11	210
14	215
17	220
20	225
23	230
26	235
29	240
32	250
35	255
38	260
41	275
44	280
47	290
50	305
53	300
56	320
59	340
62	360
65	380
68	400
71	420
74	440
77	470
80	500
83	540
86	570

Tabelle 1: Messwerte für Polarisation senkrecht zur Einfallsebene

Winkel [°]	Strom [μA]
2	215
5	215
8	215
11	210
14	205
17	200
20	195
23	190
26	185
29	180
32	170
35	165
38	155
41	145
44	135
47	125
50	110
53	100
56	85
59	70
61	59
63	48
65	38
67	28
69	19
71	11
73	4,5
74	2,65
75	1,45
75,25	1,3
75,5	1,3
75,75	1,3
77	1,5
78	3
79	6
80	11
81	19
83	29
85	120
87	225

Tabelle 2: Messwerte für Polarisation parallel zur Einfallsebene

Winkel α	E_r	n_i nach (10)
2	14,49	3,78
5	14,66	3,85
8	14,66	3,83
11	14,49	3,72
14	14,66	3,76
17	14,83	3,79
20	15	3,8
23	15,17	3,81
26	15,33	3,8
29	15,49	3,79
32	15,81	3,84
35	15,97	3,79
38	16,12	3,74
41	16,58	3,82
44	16,73	3,73
47	17,03	3,71
50	17,46	3,74
53	17,32	3,45
56	17,89	3,51
59	18,44	3,56
62	18,97	3,59
65	19,49	3,59
68	20	3,56
71	20,49	3,49
74	20,98	3,36
77	21,68	3,4
80	22,36	3,38
83	23,24	3,67
86	23,87	3,47

Tabelle 3: n_i für Polarisation senkrecht zur Einfallsebene

Winkel α	E_r	n_i nach (11)
2	14,66	4,42
5	14,66	4,44
8	14,66	4,46
11	14,49	4,39
14	14,32	4,33
17	14,14	4,29
20	13,96	4,26
23	13,78	4,24
26	13,6	4,23
29	13,42	4,24
32	13,04	4,16
35	12,85	4,2
38	12,45	4,15
41	12,04	4,12
44	11,62	4,11
47	11,18	4,12
50	10,49	4,04
53	10	4,09
56	9,22	4,05
59	8,37	4,03
61	7,68	4
63	6,93	3,97
65	6,16	3,97
67	5,29	3,96
69	4,36	3,96
71	3,32	3,98
73	2,12	3,99
74	1,63	4,06
75	1,2	4,17
75,25	1,14	4,22
75,5	1,14	4,29
75,75	1,14	4,37
77	-1,22	3,87
78	-1,73	4,01
79	-2,45	4,12
80	-3,32	4,20
81	-4,36	4,25
83	-5,39	5,02
85	-10,95	3,99
87	-15	3,99

Tabelle 4: n_i für Polarisation parallel zur Einfallsebene