Praktikumsprotokoll

Versuch Nr. 402
Dispersionsmessungen am Glasprisma

Frank Hommes
und
Kilian Klug

Durchgeführt am:
8 Juni 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Theoretische Hintergründe **3**

3 Durchführung und Auswertung **6**
3.1 Bestimmung der Brechungsindices 6
3.2 Wahl einer passenden Dispersionskurve 7
3.3 Berechnung der Abbeschen Zahl 7
3.4 Berechnung des theoretischen Auflösevermögens 8
3.5 Berechnung der Absorbtionsstelle λ_i 8

4 Anhang **8**

1 Einleitung

Dieser Versuch befasst sich mit Phänomenen, die beim Durchgang von Licht durch Materie auftreten. Ziel ist es, den Brechungsindex des verwendeten Materials zu ermitteln, sowie Aussagen über die Dispersion zu treffen.

2 Theoretische Hintergründe

Das Licht wird hier als (elektromagnetische) Welle aufgefasst, der Teilchencharakter spielt keine Rolle. Trifft eine Wellenfront schräg auf eine Grenzfläche zweier Medien mit unterschiedlichen Brechungsindices n_i, so erfährt er eine Richtungsänderung, infolge der unterschiedlichen Geschwindigkeiten des Lichtes in den beiden Medien. Das Verhältnis dieser Geschwindigkeiten definiert den Brechungsindex n nach

$$n := \frac{c}{v}. \tag{1}$$

Die Richtungsänderung bezeichnet man auch als Brechung und eine Erklärung bietet das Huygensche Prinzip. Dieses besagt, dass jeder Punkt einer bestehenden Wellenfläche als Zentrum einer neuen kugelförmigen ”Elementarwelle” aufgefasst werden kann. Die Einhüllende aller Elementarwellen gibt die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt an. Veranschaulicht ist die Situation in Abb.1

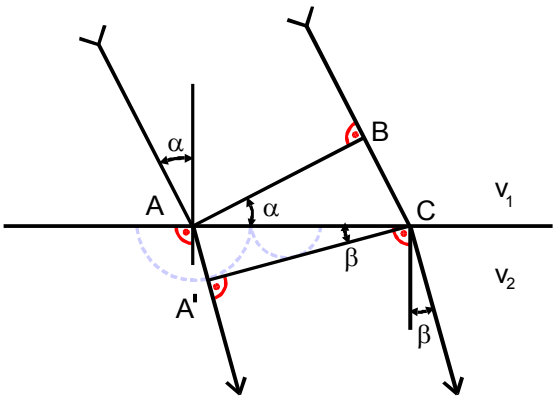


Abbildung 1: Zur Ableitung des Snelliusschen Brechungsgesetzes mit Hilfe des Huygensschen Prinzips

Aus geometrischen Betrachtungen kann man nun auch den Zusammenhang

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = n \tag{2}$$

gewinnen, den man das Snelliussche Brechungsgesetz nennt.

Der Brechungsindex n ist zwar eine materialspezifische Größe, er hängt jedoch zudem von der Frequenz (bzw. Wellenlänge) des Lichtes ab. Dieser Zusammenhang wird Dispersion genannt und soll nun etwas näher beleuchtet werden.

Bei den folgenden Betrachtungen sind einige Einschränkungen zu beachten:

- Materie wird nicht als Kontinuum betrachtet, vielmehr werden die lokalisierten, geladenen Elektronen und Ionenrümpfe berücksichtigt. Diese befinden sich in Gleichgewichtslagen und werden durch das elektrische Wechselfeld der Lichtwellen zu erzwungenen Schwingungen angeregt.
- Die Wechselwirkung zwischen Materie und Strahlung wird nicht vollständig erfasst - insbesondere in der Nähe von Resonanzstellen sind die abgeleiteten Zusammenhänge nicht gültig.

Es falle eine ebene Welle mit

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t} \tag{3}$$

ein. Da nun geladene Teilchen periodisch mit der Kraft $\vec{F}_e = q_h\vec{E}$(unter Vernachlässigung der Polarisation $\vec{P}$) ausgelenkt werden, entstehen elektrische Dipole. Summation der Dipolmomente über alle Teilchenarten h liefert das Dipolmoment pro Volumeneinheit, welches man auch Polarisation $\vec{P}$ nennt:

$$\vec{P} = \sum_h \vec{P}_h = \sum_h N_h q_h \vec{x}_h \tag{4}$$

Unter Berücksichtigung der rücktreibenden Kraft $\vec{F}_r$, sowie einer Reibungskraft $\vec{F}_d$ kann man eine Bewegungs-Differentialgleichung für die Materieteilchen aufstellen. Mit (4) kann man daraus die die bekannte DGL für erzwungene Schwingungen gewinnen:

$$\frac{d^2\vec{P}_h}{dt^2} + \frac{f_h}{m_h}\frac{d\vec{P}_h}{dt} + \frac{a_h}{m_h}\vec{P}_h = \frac{N_q q_h^2}{m_h}\vec{E}_0 e^{i\omega t} \tag{5}$$

(m_h=Teilchenmassen, a_h/m_h=Resonanzfrequenz ω_h^2)
Setzt man nun die Lösung dieser DGL ein, so ergibt sich für die gesamte Polarisation

$$\vec{P} = \sum_h \vec{P}_h = \sum_h \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i\frac{f_h}{m_h}\omega}\frac{N_q q_h^2}{m_h}\vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad . \tag{6}$$

Da die Polarisation eines Mediums gleich der dielektrischen Verschiebung $\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ in der Materie vermindert um die dielektrische Verschiebung $\varepsilon_0\vec{E}$ im Vakuum ist kann man unter Verwendung der Maxwellschen Relation $n^2 = \varepsilon$ den gesuchten Zusammenhang zwischen Brechnungsindex und Lichtfrequenz herstellen:

$$\tilde{n}^2 = 1 + \sum_h \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i\frac{f_h}{m_h}\omega} \frac{N_q q_h^2}{m_h \varepsilon_0} \tag{7}$$

Die "Tilde" bedeutet hier, dass es sich um eine komplexe Größe handelt - es gilt $\tilde{n} = n \pm ik$ mit k=Extinklionskoeffizient. Zerlegt man (7) in Real- und Imaginärteil, so erhält man die Dispersionsgleichungen. Unter der Annahme $n^2 k \approx 0$ (d.h. für Bereiche weit entfernt von den Resonanzfrequenzen) geht der Realteil über in

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_h \frac{N_h q_h^2}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 m_h} \frac{\lambda^2 \lambda_h^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2} \quad . \tag{8}$$

Sei λ_1 eine weit von λ entfernte Absorptionsstelle, dann ergibt eine Potenzreihenentwicklung von (8) nach Potenzen von λ_1/λ
für $\lambda \gg \lambda_1$:

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + \ldots \quad \text{mit} \quad A_i > 0 \tag{9}$$

für $\lambda \ll \lambda_1$:

$$n^2(\lambda) = 1 - A_2'\lambda^2 - A_4'\lambda^4 - \ldots \quad \text{mit} \quad A_i' > 0 \quad \text{für} \quad i \geq 2 \tag{10}$$

Aus den beiden Gleichungen (9) und (10) ergeben die beiden in Abb.2 dargestellten Dispersionskurven.

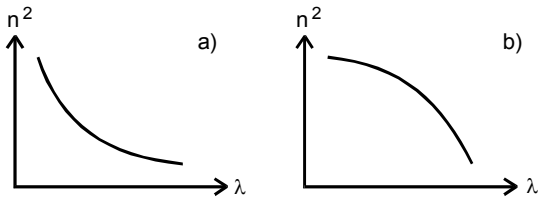


Abbildung 2: Gestalt der Dispersionskurven a) nach (9), b) nach (10)

Die beiden Kurven sind Beispiele für den Fall, dass der Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge abnimmt. Man spricht von normaler Dispersion. Umgekehrt bedeutet anormale Dispersion eine Zunahme des Brechungsindexes mit der Wellenlänge.

3 Durchführung und Auswertung

3.1 Bestimmung der Brechungsindices

Zur Messung des Brechnungsindex benutzen wir einen Prismenspektralapparat. Dabei ist ein Glasprisma auf dem Drehteil eines Goniometers montiert. Durch einen Spalt und eine Sammellinse fällt Licht aus einer Helium-Dampf-Lampe auf das Prisma. Dadurch, dass der Spalt in der Brennebene des Linse steht, erhalten wir paralleles Licht. Nach der Brechung fällt das Licht auf ein Fernrohr und eine Objektivlinse wirft das Spaltbild in die Brennebene einer Lupe, durch welche wir die Spektrallinien sehen können.

Da wir nur den symmetrischen Fall betrachten, bei dem $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ ist, folgt

$$n = \frac{sin(\frac{\eta+\phi}{2})}{\sin\frac{\phi}{2}}.$$

Um sicherzustellen, dass ein symmertrischer Strahlenverlauf vorliegt, bringt man den gebrochenen Strahl, mit dem an der Basis des Prismas reflektrierten Strahl, zur Deckung. Dann misst man die Auslenkung des gebrochenen Strahles links und rechts und berechnet den Brechnungswinkel wie folgt:

$$\eta = 180^\circ - (\Omega_r - \Omega_l)$$

Farbe	lambda [nm]	$Omega_{links}$ [°]	$Omega_{rechts}$ [°]	η [°]	n
dunkelrot	706,5	190,4	57,8	47,4	1,612
rot	667,8	190,3	57,85	47,6	1,613
gelb	587,6	190,0	58,2	48,2	1,620
grün	504,8	189,6	58,5	48,9	1,627
grün	501,6	189,5	58,6	49,1	1,629
blaugrün	492,2	189,4	58,7	49,3	1,631
blau	471,3	189,3	58,85	49,55,0	1,634
violett	447,1	189,1	59,1	50,0	1,638
violett	438,8	189,0	59,2	50,2	1,640

Tabelle 1: Messergebnisse und Berechnungen

Weiterhin sollte der Winkel an der brechenden Kante gemessen Dafür haben wir diese Kante auf das Kollimatorrohr gerichtet und den Winkel des reflektierten Strahles gemessen. Auch dieser Winkel wurde auf beiden Seiten abgelesen ($\phi_l = 89,1^\circ$ und $\phi_r = 209,1^\circ$), wobei das Prisma mit der brechenden Kante über den

Strahl hinweg auf eine spiegelverkehrte Position gedreht wurde. Nach

$$(-89,1^\circ + 209,1^\circ) = 180^\circ - \phi$$

ergibt sich ϕ zu genau 60°.

Die gemessenen und berechneten Werte für η und n sind in Tabelle .1 dargestellt.

3.2 Wahl einer passenden Dispersionskurve

In Abb. 2 haben wir die Graphen der möglichen Dispersionsgleichungen kennengelernt. Nun ist zu prüfen, zu welcher Kurve unsere erhaltenen Wertepaare $[n(\lambda_i), \lambda_i$]besser passen. Dazu berechnen wir zunächst die Vorfaktoren A_0 und A_0' mit Hilfe einer linearen Kurvenanpassung. Wir erhalten:

$$A_0 = 2,539(\pm 0,003) \quad \text{und} \quad A_2 = 28951 \pm 699$$

$$A_0' = 2,734(\pm 0,009) \quad \text{und} \quad A_2' = 2,899 \cdot 10^{-7} \pm 1,917 \cdot 10^{-8}$$

Die zugehörigen Kurven befinden sich in Diagramm 3, wobei Formel 9 die Dispersionkurve 1 darstellt und Formel 10 die Dispersionkurve 2. Man erkennt sofort, dass 9 die passende Gestalt besitzt. Auch die Summe der Abweichungsquadrate, ist von der ersten Gleichung deutlich kleiner ($s_n^2 = 5,15 \cdot 10^{-06}$) als von der zweiten ($s_{n'}^2 = 8,37 \cdot 10^{-05}$), was unsere Aussage unterstreicht. Somit besitzt die Dispersionsgleichung folgende Gestalt:

$$n^2(\lambda) = (2,539 \pm 0,003) + \frac{(28951 \pm 699)}{\lambda^2} \tag{11}$$

3.3 Berechnung der Abbeschen Zahl

Durch die berechneten Koeffizienten der Dispersionsgleichung, können wir nun die Abbesche Zahl

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

für das verwendete Glasmaterial berechnen. Dabei sind n_C,n_D und n_F die Brechungsindices der Wellenlängen folgender Fraunhoferscher Linien: λ_C =656 nm, λ_D = 589 nm und λ_F = 486 nm. Daraus ergibt sich:

$$n_C = 1,614(\pm 0,002) \tag{12}$$

$$n_D = 1,619(\pm 0,002) \tag{13}$$

$$n_F = 1,631(\pm 0,002) \tag{14}$$

Damit ist die Abbesche Zahl $\nu = 36,41(\pm 3,27)$. Die Fehler wurden nach Gaußsch'er Fehlerfortpflanzung berechnet.

3.4 Berechnung des theoretischen Auflösevermögens

Da der Prismen-Spektralapparat zwei benachbarte Sektrallinien nur auflösen kann, wenn diese sich innerhalb des Auflösevermögens befinden, interessieren wir uns noch für das Auflösevermögen

$$A := \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b \cdot \frac{dn}{d\lambda}.$$

b=3cm ist hier die Länge der Grundseite des Prismas. Daraus folgt für die Wellenlängen λ_c und λ_f:

$$A = 0,03 \cdot \frac{0,017}{170 \cdot 10^{-9}} = 3000$$

Somit beträgt das Auflösungsvermögen des Prismen-Spektralapparates bei den gegebenen Wellenlängen $A = 3000$.

3.5 Berechnung der Absorbtionsstelle λ_i

Mit unseren optimierten Parametern berechnen wir nun die Absorbtionsstelle λ_i, welche dem sichtbaren Licht am nähsten ist. Dazu setzen wir

$$A_2 = \frac{N_1 q_1^2 \lambda_1^2 \cdot \lambda_1^2}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 m_1} \tag{15}$$

in

$$A_0 = 1 + \frac{N_1 q_1^2 \lambda_1^2}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 m_1} \tag{16}$$

ein und erhalten

$$A_0 = 1 + \frac{A_2}{\lambda_1^2}. \tag{17}$$

Nochmal ungeformt ergibt sich

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{A_2}{A_0 - 1}} = (137,2 \pm 3,5) nm. \tag{18}$$

4 Anhang

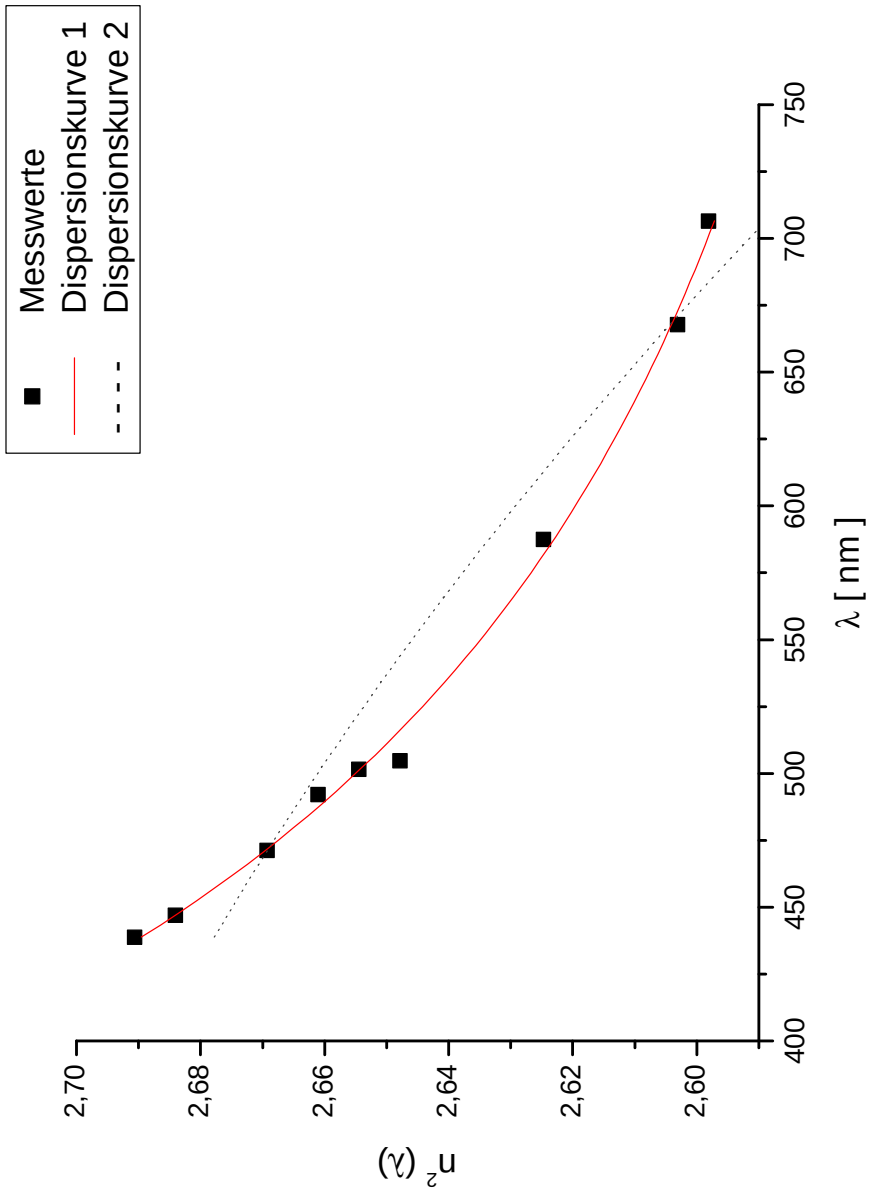


Abbildung 3: Die beiden möglichen Dispersionkurven zusammen mit unseren Messwerten