Praktikumsprotokoll

Versuch Nr. 401
Das Michelson-Interferometer

Frank Hommes
und
Kilian Klug

Durchgeführt am:
25 Mai 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Theoretische Hintergründe **3**
2.1 Punktförmige Lichtquellen 4
2.2 Ausgedehnte Lichtquellen 6
2.3 Aufbau des Michelson-Interferometers 7

3 Durchführung und Auswertung **8**
3.1 Justierung 10
3.2 Wellenlängenbestimmung eines He-Ne-Lasers 10
3.3 Brechungsindexbestimmung 11
3.3.1 Luft 11
3.3.2 Kohlendioxid 12
3.4 Bestimmung des Abstandes einer Dublettlinie 13
3.4.1 Messung der Wellenlänge 13
3.4.2 Untersuchung der Schwebung 14

1 Einleitung

In diesem Versuch steht das Michelson-Interferometer im Mittelpunkt. Dieses Gerät wird üblicherweise für die Messung von absoluten Wellenlängen sowie kleinen Wellenlängen- und Brechungsindexunterschieden verwendet, was auch das Ziel des Experimentes ist.

2 Theoretische Hintergründe

Für das vorliegende Experiment wird das Licht als elektromagnetische Welle aufgefasst, da seine Teilcheneigenschaften hier keine wesentliche Rolle spielen.

Für den einfachsten Fall einer ebenen Welle der elektrischen Feldstärke

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t - \delta) \tag{1}$$

gilt das Superpositionsprinzip, d.h. für einen Raumpunkt an dem sich mehrere Felder überlagern gilt

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots \tag{2}$$

Aufgrund der großen Frequenz von Licht (ca. 10^{15}Hz) muss man sich bei Experimenten mit der Intensität (=Zeitmittelwert der auf eine Fläche treffenden Lichtleistung) begnügen. Für die Intensität an einem Ort x, an dem sich zwei Feldstärken überlagern erhält man unter Verwendung von (1)

$$I_{ges} = \frac{\text{const.} \cdot \vec{E}_0^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left(1 + e^{i(\delta_2 - \delta_1)} + e^{-i(\delta_2 - \delta_1)} + 1\right) dt$$

$$\Rightarrow \quad I_{ges} = 2 \cdot \text{const.} \cdot \vec{E}_0^2 \big(1 + \cos(\delta_2 - \delta_1)\big) \quad . \tag{3}$$

Vorraussetzung ist hier, dass das Beobachtungsintervall $t_2 - t_1$ groß gegen die Periodendauer T=$2\pi/\omega$ der Feldstärken ist.

Wichtigste Folgerung aus (3) ist, dass sich die Intensitäten nicht einfach addieren, sondern ein Interferenzterm

$$2 \cdot \text{const.} \cdot \vec{E}_0^2 \cos(\delta_2 - \delta_1) \tag{4}$$

auftritt, d.h. je nach Phasenbeziehung ist auch die Gesamtintensität verschieden. Sie verschwindet auch bei von null verschiedenen Einzelintensitäten für

$$\delta_2 - \delta_1 = (2n+1)\pi \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots \; . \tag{5}$$

Bei im Alltag anzutreffenden Lichtquellen beobachtet man jedoch keinerlei Interferenzerscheinungen. Dies liegt daran, dass die Phasenbeziehungen der einzelnen

Wellenzüge nicht konstant sind. Um Interferenzeffekte zu beobachten, wird Licht benötigt, bei dem die von allen Lichtquellen (letztlich also den Atomen) erzeugten Wellen sich durch eine einheitliche Gleichung gemäß (1) darstellen lassen mit festen k, ω und δ. Im Besonderen sind hierfür zwar Laser geeignet, es ist unter bestimmten Voraussetzungen jedoch auch möglich, konventionelle Lichtquellen zu verwenden.

2.1 Punktförmige Lichtquellen

Hierfür wird Licht, das von einem einzigen Atom emittiert wird, mit einem Strahlteiler aufgespaltet und anschließend selbst zur Interferenz mit sich selbst gebracht (vgl. Abb.1). Der (optische) Wegunterschied der beiden Teilstrahlen darf jedoch

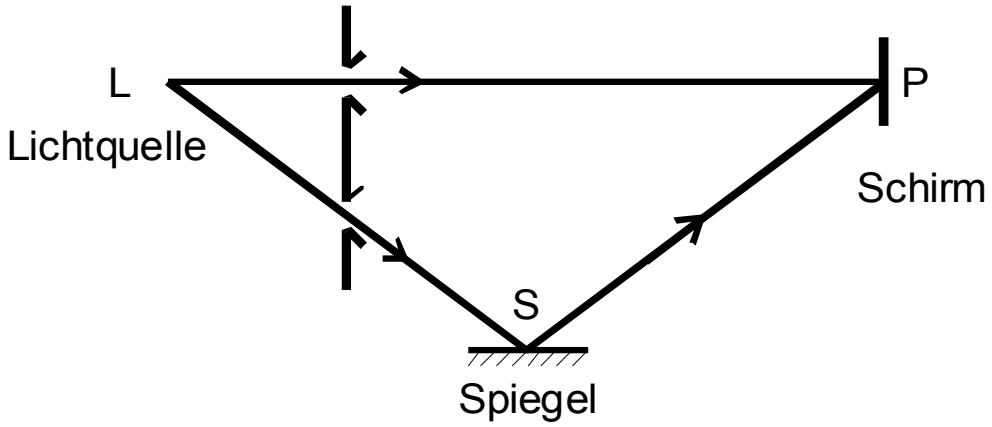


Abbildung 1: Prinzipielle Versuchsanordnung zur Erzeugung von Interferenerscheinungen unter Verwendung einer konventionellen Lichtquelle

eine gewisse Größe nicht überschreiten, da die gleichzeitig ausgesandten Wellenzüge sonst zu unterschiedlichen Zeiten im Beobachtungspunkt P eintreffen und die Interferenzerscheinungen verschwinden. Die maximal mögliche Weglängendifferenz bezeichnet man als Kohärenzlänge l. Sie kann nach

$$l = N \cdot \lambda \tag{6}$$

durch die Zahl N der maximal in P beobachtbaren Intensitätsmaxima und die Wellenlänge bestimmt werden.

Zu dem Ergebnis, dass Interferenzfähgkeit des Lichtes durch die Endlichkeit eines Wellenzuges eingeschränkt ist, kommt man auch mit dem Fourierschen

Theorem. Nach diesem besitzen die endlichen Wellenzüge ein Frequenz- und Wellenlängenspektrum. In den Spektren zweier Teilbündel lassen sich also Wellenlängen finden, die Interferenzeeffekte (z.B. durch Auslöschung) verwischen. Bedingung für Interferenz ist hier also, dass das Frequenzspektrum so schmal oder der Wegunterschied so klein ist, dass die Maximums- und Minimumsbedingungen für zwei Wellenlängen nicht gleichzeitig in P realisiert werden können.

Gesucht ist nun ein Zusammanhang zwischen der Kohärenzlänge l bzw. der Zeitdauer

$$\tau = \frac{l}{c} \tag{7}$$

des Emissionsaktes (Kohärenzzeit) und der Breite $\Delta\lambda$ der Wellenlängen- bzw. Frequenzverteilung $\Delta\omega$.

Es wird ein sinusförmiger endlicher Wellenzug mit

$$E(t) = \begin{cases} E_0\, e^{-i\omega_0 t} & \text{für} \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{8}$$

angenommen (die in der Natur nicht vorkommende Unstetigkeit kann zu Abweichungen der Theorie vom Experiment führen).

Das Frequenzspektrum g(ω) erhält man durch eine Fourier-Transformation aus deren Ergebnis sich leicht die Intensität

$$G(\omega) = |g(\omega)|^2 = 4E_0^2 \frac{\sin^2(\omega - \omega_0)\frac{\tau}{2}}{(\omega - \omega_0)^2} \tag{9}$$

errechnet. Man erkennt, dass G(ω) ein Maximum bei $\omega = \omega_0$ besitzt und an den Stellen

$$\omega_N = \omega_0 \pm 2\frac{\pi}{\tau} \tag{10}$$

bis auf Null absinkt. Der größte Teil der Energie ist dabei im Bereich

$$\omega_0 - 2\frac{\pi}{\tau} < \omega < \omega_0 + 2\frac{\pi}{\tau}$$

konzentriert. Die Breite

$$\Delta\omega = 2\frac{\pi}{\tau} \tag{11}$$

der Verteilungsfunktion G(ω) ist der gesuchte Zusammenhang.
Mit (11) und (7) folgt für die Breite der Wellenlängenverteilung

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{l} \quad . \tag{12}$$

2.2 Ausgedehnte Lichtquellen

Um auch die bei Experimenten zumeist verwendeten, flächig ausgedehnten Lichtquellen zu berücksichtigen müssen einige zusätzliche Überlegungen angestellt werden.

Sei $\overline{L_1L_2} = a$ die Ausdehnung der Fläche und blicke man von P aus senkrecht auf die Fläche L_1L_2 (vgl. Abb.2. Damit sind die beiden Strahlenwege 2 und 4

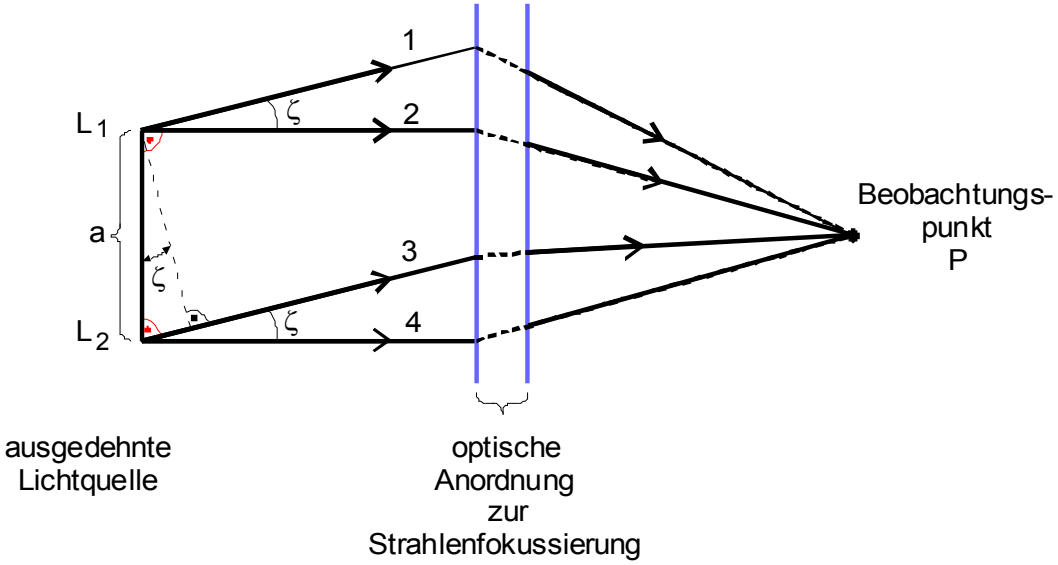


Abbildung 2: Prinzipielle Versuchsanordnung zur Ableitung der Kohärenzlänge bei einer ausgedehnten Lichtquelle

gleichlang (Nλ, N$\gg$1). Die Strahlen 1 und 2, sowie 3 und 4 seien paarweise interferenzfähig, da L_1 und L_2 für sich jeweils als punktförmig angesehen werden. Beträgt der Wegunterscheid zwischen 1 und 2 oBdA $\lambda/2$, dann löschen sich die beiden in P aus. 3 und 4 würden sich unabhängig von ihrer zeitlich schwakenden Phasenbeziehung δ(t) ebenfalls in P auslöschen, wenn nicht durch den Richtungsunterschied ζ eine weiter Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ aufträte. Um Interferenzeffekte beobachten zu können, muss diese klein gegen π sein.

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \cdot \sin\zeta \tag{13}$$

Damit folgt die Kohärenzbedingung für ausgedehnte Lichtquellen

$$a \cdot \sin\zeta \ll \lambda/2 \quad . \tag{14}$$

Bedingung ist also, dass entweder die Abmessungen der Lichtquelle oder der Öffnungswinkel, unter dem sie beobachtet wird, sehr klein gehalten werden.

Neben den bereits angesprochenen Dingen spielt aber auch die Polarisation des Lichtes eine Rolle: Sind die beiden Teilbündel linear polarisiert, verschwindet der oben erwähnte Interferenzterm, wenn die Polarisationsvektoren senkrecht aufeinander stehen.

2.3 Aufbau des Michelson-Interferometers

Nachdem nun die Grundlagen erläutert wurden soll noch kurz das bei der Messung verwendete Gerät - ein sogenanntes Michelson-Interferometer - vorgestellt werden. Mit diesem können optische Größen durch Interferenzeffekte gemessen werden. Zur Strahlaufteilung wird eine semipermeable Platte verwendet, wobei keine punktförmige Lichtquelle notwendig ist. Der prinzipielle Aufbau ist in Abb.3 dargestellt. Nach der Reflexion an den beiden Spiegeln und erneuter Ablenkung in

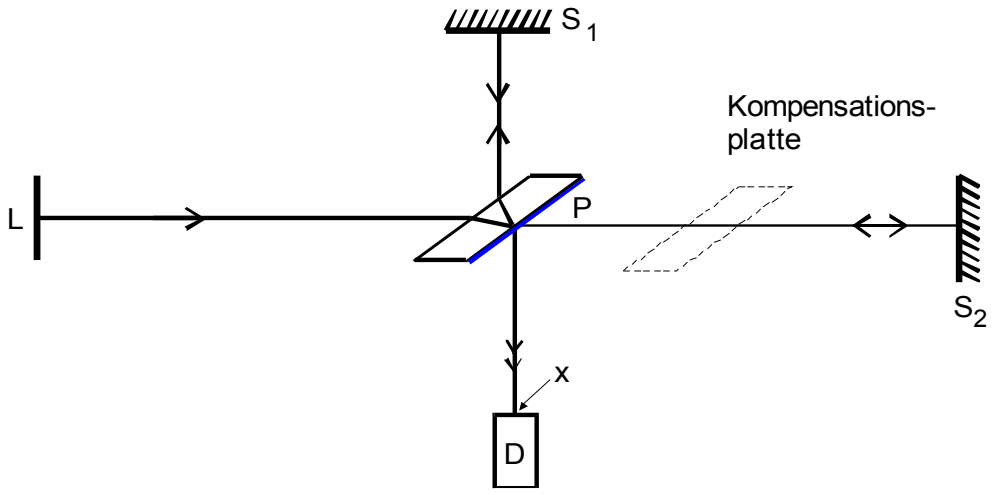


Abbildung 3: Prinzipieller Aufbau eines Michelson-Interferometers (L=Lichtquelle, S_1 und S_2 Spiegel, P=semipermeabler Spiegel, D=Lichdetektor

P in Richtung Detektor sind die beiden Strahlbündel noch immer kohärent, wenn ihr optischer Wegunterschied kleiner als die Kohärenzlänge der Lichtquelle ist. Sind die Abstände $\overline{S_1P}$ und $\overline{S_2P}$ gleich lang, so besteht wegen des Phasensprungs

bei der Reflexion des von S_2 kommenden Strahles an P ein Gangunterschied von $\lambda/2$ - es kommt also zur Auslöschung. Nun kann einer der beiden Spiegel um d verschoben werden, um einen Wegunterschied von w=2d zu erreichen. Mit

$$k = 2\pi\lambda$$

gilt dann für die Intensität

$$I(d) = 2 \cdot \text{const} \cdot \vec{E}_0^2 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} 2d + \pi\right)\right) \quad . \tag{15}$$

Es ist also aufgrund der periodischen Schwankung der Intensität (räumliche Periode = $\lambda/2$) eine Wellenlängenmessung möglich. Sei z die Anzahl der während einer Verschiebung des Spiegels um Δd auftretenden Helligkeitsmaxima, dann gilt

$$\Delta d = z \cdot \frac{\lambda}{2} \quad . \tag{16}$$

Alternativ kann ein optischer Wegunterschied auch durch Einbringen eins Mediums der Dicke b mit einem Brechungsindex $n + \Delta n$ in einen der beiden Strahlengänge erzielt werden. Der optische Wegunterschied ist dann Δnb. Wird dann beispielsweise der Gasdruck des eingebrachten Mediums erhöht, dann laufen am Detektor nacheinander z Intensitätsmaxima durch. Damit gilt

$$b \cdot \Delta n = \frac{z\lambda}{2} \quad . \tag{17}$$

Normalerweise arbeitet man mit einem divergenten Strahlenbündel, so dass dann zusätzlich der Winkel den die Strahlen mit der Spiegelnormalen einschließen berücksichtigt werden. Im vorliegenden Experiment werden jedoch Sammelllinsen verwendet um dies zu umgehen.

3 Durchführung und Auswertung

Der Versuch wurde an der linken der beiden zur Verfügung stehenden Apparaturen durchgeführt.

Abb.4 zeigt schematisch die verwendete Apparatur. Das Untersetzungsverhältnis liegt bei 1:5,017

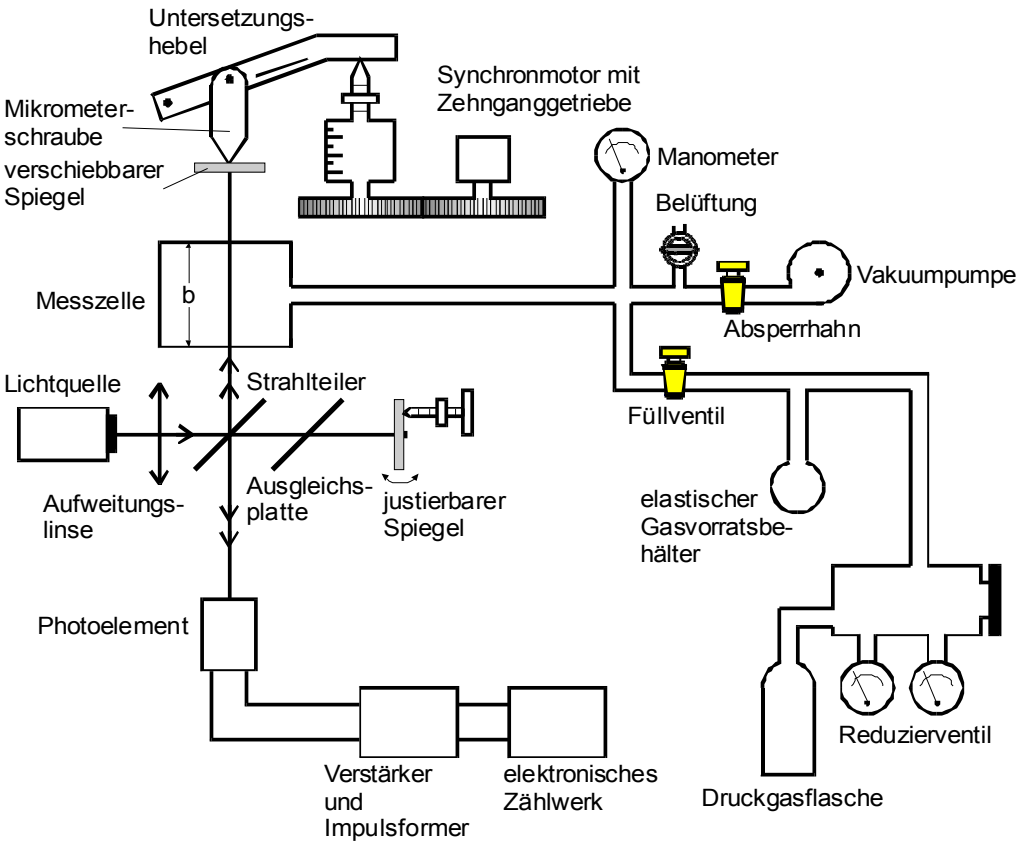


Abbildung 4: Schematische Darstellung der kompletten Messapparatur

3.1 Justierung

Vor Begin der eigentlichen Messungen muss der Strahlengang des Michelson-Interferometers einjustiert werden. Als Lichtquelle dient ein Laser. Zunächst werden die beiden hellsten, auf einem Schirm sichtbaren Punkte zur Deckung gebracht, um anschließend mit Hilfe einer kurzbrennweitigen Linse das Lichtbündel aufzuweiten. Das nun sichtbare konzentrische Ringsystem wird so ausgerichtet, dass sein Mittelpunkt genau auf das Photoelement im Detektor fällt.

3.2 Wellenlängenbestimmung eines He-Ne-Lasers

Um die Wellelänge des verwendeten Lasers zu bestimmen wird ein Spiegel durch einen Motor bewegt und währenddessen die Anzahl der Interferenzringe von einem Zählwerk registriert. Um hier ein vernünftiges Signal zu erhalten, ist dem Photoelement ein Verstärker nachgeschaltet, dessen Verstärkung per Hand geregelt werden kann. Es wird darauf geachtet, dass unter den herrschenden Lichtbedingungen möglichst keine Fehlzählungen auftreten. Der jeweilige Verschiebeweg Δd des Spiegels kann an einer Skala an der Mikrometerschraube abgelesen werden.

Nun wird eine Messreihe von sieben Einzelmessungen durchgeführt. Die Wellenlänge errechnet sich nach (16), wobei noch die Untersetzung berücksichtigt werden muss:

$$\lambda = \frac{2\Delta d}{5,017 \cdot z}$$

Es ergeben sich folgende Ergebnisse (Tab.1) - der kleinste und größte Wert wurden weggelassen, um einen besseren Wert für den Mittelwert zu erhalten:

Messung #	Δd [mm]	z	λ [nm]
1	0,66	419	627,94
2	0,67	413	646,71
3	0,65	417	621,39
(4)	(0,675)	(435)	(618,59)
(5)	(0,785)	(421)	(743,32)
6	2,75	1751	626,08
7	3,01	1909	628,56

Tabelle 1: Messergebnisse der Bestimmung der Wellenlänge des He-Ne-Lasers

Der Mittelwert beträgt (630,14 $\pm$ 8,66)nm, so dass der wahre Wert von 632,8 nm innerhalb der Toleranzgrenzen liegt.

3.3 Brechungsindexbestimmung

Nun sollen die Brechungsindices von Luft und Kohlendioxid ermittelt werden, was mit der gleichen Apparatur geschieht. In einem Strahlengang befindet sich dazu, wie man Abb.4 entnehmen kann, eine Messzelle der Dicke b=50mm, in die ein Gas eingefüllt wird. Es werden jeweils Messreihen durchgeführt, um die Anzahl z der Intensitätsmaxima sowohl bei Druckanstieg, als auch bei Druckabfall zu zählen.

Die gesuchten Brechungsindices n_i errechnen sich nach (17) sowie

$$n(p_0, T_0) = 1 + \Delta n(p, p') \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{p - p'} \tag{18}$$

, wobei p_0=1013,2mbar und T_0=273,15K die Normalbedingungen angeben. Die Raumtemperatur nehmen wir mit T=21°C an.

3.3.1 Luft

Der Umgebungsdruck betrug 760 Torr; der Druck in der Messzelle ließ sich bis auf 10 Torr erniedrigen.

Aus den folgenden Messwerten (Tab.2) ergibt sich als Mittelwert

$$z = (40,1 \pm 1,0) \quad .$$

Messung #	z (10 → 760 Torr)	z (760 → 10 Torr)
1	40	41
2	38	41
3	39	41
4	40	41
5	39	41
Mittelwert	39,2 ± 0,7	41 ± 0

Tabelle 2: Messwerte für z bei Luft

Die Fehler sind hier die Standardabweichungen der Mittelwerte.
Die Brechungsindexänderung Δn_+ bei Druckanstieg beträgt demnach

$$\Delta n_+ = \frac{39,2 \cdot 632,8\text{nm}}{2 \cdot 50\text{mm}} \approx 0,248 \cdot 10^{-3} \quad .$$

Der Brechungsindex von Luft unter Normalbedingungen ergibt sich damit zu

$$n_{Luft,+}(p_0,T_0) = 1 + 0,248 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{294,15\text{K}}{273,15\text{K}} \cdot \frac{760\text{Torr}}{(760-10)\text{Torr}} \approx 1,00027$$

Die Brechungsindexänderung Δn_- bei Druckabfall ist analog

$$\Delta n_- \approx 0,259 \cdot 10^{-3} \quad ,$$

woraus für den Brechungsindex folgt:

$$n_{Luft,-}(p_0,T_0) \approx 1,00028$$

Beide Werte für n sind also in der richtigen Größenordnung, wobei das Ergebnis bei abnehmendem Druck dem Literaturwert von 1,00029 näher kommt (Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Luft).

3.3.2 Kohlendioxid

Ebenso wie bei der Messung mit Luft betrug der Umgebungsdruck während der Messung an Kohlendioxid 760 Torr und der Druck in der Messzelle ließ sich auch hier reproduzierbar auf 10 Torr absenken. Die nachstehend aufgeführten Messwerte (Tab.3) konnten ermittelt werden, der Mittelwert über beide Messreihen ist

$$z = (62,63 \pm 0,48) \quad .$$

Messung #	z (10 → 760 Torr)	z (10 → 760 Torr)
1	(55)	62
2	62	63
3	63	62
4	63	63
5	63	63
Mittelwert	62,75 ± 0,43	62,5 ± 0,5

Tabelle 3: Messwerte für z bei Kohlendioxid

Analog zur obigen Rechnung ergeben sich hier für Δn und n, wie in Tab.4 aufgeführt.

	Δ n	n
Druckanstieg (10 → 760 Torr)	$0{,}397 \cdot 10^{-3}$	1,00043
Druckabfall (760 → 10 Torr)	$0{,}395 \cdot 10^{-3}$	1,00043

Tabelle 4: Ergebnisse für Kohlendioxid

Auch in diesem Fall stimmt der Wert von n bei abnehmendem Druck gut mit dem Literaturwert von n_{CO2}=1,00449 überein

(Quelle: http://www.zvw.de/homepages/wb5768ib/Schule/Physik/Optik/Snellius.html).

3.4 Bestimmung des Abstandes einer Dublettlinie

Als Lichtquelle wird in diesem Versuchsteil eine Natriumdampflampe eingesetzt, in deren Spektrum der Abstand $\Delta\lambda$ der gelben Spektrallinien bestimmt werden soll. Für die Abbildung der Interferenzfigur auf das Photoelement wird die bisher verwendete kurzbrennweitigen Linse durch eine neue ersetzt (f=20cm).

3.4.1 Messung der Wellenlänge

Zunächst wird wiederum die Wellenlänge bestimmt, was ähnlich wie zuvor beim He-Ne-Laser abläuft. Mit δd=0,45mm und z=302 ergibt sich die Wellenlänge zu

$$\lambda = 594,01\text{nm} \quad .$$

Der Literaturwert ist hier 589nm.

3.4.2 Untersuchung der Schwebung

Ausser der Wellenlänge wird noch das Schwebungsbild benötigt. Während der Spiegel bewegt wird (Geschwindigkeit des Motors: 1 Umdrehung pro Minute $\hat{=}$ 0,5 mm/min) laufen zwar auch hier die normalen Intensitätsmaxima und -minima über das Photoelement, diese sind jedoch mit einer langsameren Frequenz moduliert. Dies zeigt sich darin, dass das Interferenzbild periodisch verschwindet, was auf die endliche Kohärenzlänge zurückzuführen ist. Die beiden unterschiedlichen Frequenzen erzeugen eine Schwebung, die auf einem angeschlossenen Speicheroszilloskop sichtbar gemacht wird. Dieses war auf eine Ablenkung von 50 Sekunden pro "Kästchen" eingestellt. Anhand der Abstände der Schwebungsminima, die aufgrund der recht groben Skala und den nicht eindeutig zu lokaliesierenden Minima nur ungefähr zu 3,3 Kästchen, 3,5 Kästchen und 3,5 Kästchen abgelesen werden konnten, kann man die Kohärenzlänge l errechnen. Hierfür wird lediglich noch die Geschwindigkeit des Spiegelvorschubes benötigt, welche sich aus der Motor-Geschwindigkeit von 0,5mm/min und der Untersetzung von 1:5,017 zu

$$s = 1,66 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

ergibt. Mit der mittleren Zeit von 171,7 Sekunden zwischen zwei Schwebungsminima beträgt die Kohärenzlänge l also

$$l \approx 2 \cdot 0,29\mathrm{mm} \approx 0,57\mathrm{mm} \quad .$$

Die "2" berücksichtigt hier, dass der Unterschied der Wege der beiden Strahlen im Interferometer dem Doppelten der Spiegel-Verschiebung entspricht.

Der gesuchte Abstand der Dublettlinien ergibt sich nun nach (12) zu

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{l} = \frac{(594,01\mathrm{nm})^2}{0,57\mathrm{mm}} \approx 0,62\mathrm{nm} \quad .$$

Dies stimmt unter den gegebenen Umständen - so beeinflusste z.B. bereits ein Berühren des Tisches während der Messung das Ergebnis und die Spiegel/Linsen waren nicht alle fest arretierbar - erstaunlich gut mit dem Literaturwert 0,6 nm überein.