Praktikumsprotokoll

Versuch Nr. 355
Gekoppelte Schwingkreise

Frank Hommes
und
Kilian Klug

Durchgeführt am:
6 januar 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Hintergründe **3**
1.1 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise 3
1.2 Frequenzabhängigkeit des Stromes in einem gekoppelten Schwingkreis 5

2 Durchführung und Auswertung **7**
2.1 Vorbereitende Justierungen 7
2.2 Verhältnis der Schwingungsfrequenzen 8
2.3 Fundamentalfrequenzen in Abhängigkeit von der Koppelkapazität 9
2.4 Frequenzabhängigkeit der Ströme I_2 und I_k 10

1 Theoretische Hintergründe

In diesem Versuch mit dem Titel ”Gekoppelte Schwingkreise” soll das Verhalten von zwei kapazitiv gekoppelten elektrischen Schwingkreisen untersucht werden.

Zwei schwingfähige Systeme werden als gekoppelt bezeichnet, wenn zwischen ihnen eine Verbindung besteht über die sie Energie austauschen können. Bei einem solchen System ist die zeitliche Abhängigkeit der Energieübertragung zwischen den Einzelsystemen interessant, die sich beispielsweise in der periodischen Änderung der Schwingungsamplituden zeigt.

Obwohl es zahlreiche Beispiele für solche Systeme aus der Mechanik gibt sollen im Folgenden ausschließlich elektrische Schwingkreise betrachtet werden, da es hier einfache und recht genaue Methoden zur Messung von Frequenz und Amplitude gibt.

1.1 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise

Insbesondere werden hier kapazitiv gekoppelte (LC-)Schwingkreise untersucht. Eine entsprechende Schaltung ist in Abb. 1 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass

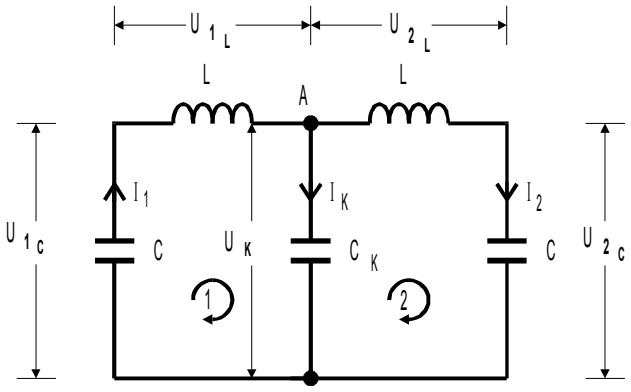


Abbildung 1: kapazitiv gekoppelte (LC-)Schwingkreise

der für die Kopplung relevante Kondensator C_K, Element beider Schwingkreise ist, so dass über diesen der Energieaustausch stattfindet.

Mit Hilfe der bekannten Kirchhoffschen Regeln erhält man unter Verwendung der Beziehungen

$$U_C = \frac{1}{C}\int I dt \tag{1}$$

$$U_L = L \cdot \dot{I} \tag{2}$$

das folgende Differentialgleichungssystem:

$$L\ddot{I_1} + \frac{1}{C}I_1 + \frac{1}{C_k}(I_1 - I_2) = 0 \tag{3}$$

$$L\ddot{I_2} + \frac{1}{C}I_2 + \frac{1}{C_k}(I_1 - I_2) = 0 \tag{4}$$

Diese beiden Gleichungen kann man durch Einführung von Summe und Differenz der einzelnen Ströme entkoppeln, so dass man nach Addition und Subtraktion findet:

$$L\frac{d^2}{dt}(I_1 + I_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \tag{5}$$

$$L\frac{d^2}{dt}(I_1 - I_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k}\right)(I_1 - I_2) = 0 \tag{6}$$

Die Gleichung einer harmonischen Schwingung löst (5):

$$(I_1 + I_2)(t) = (I_{1_0} + I_{2_0})\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}. \tag{7}$$

Wie bei einem Einzeloszillator mit Kapazität C und Induktivität L ist die Schwingungsfrequenz

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{8}$$

Für (6) ist die Lösung:

$$(I_1 - I_2)(t) = (I_{1_0} - I_{2_0})\cos\left(\frac{t}{\sqrt{L\left(\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k}\right)^{-1}\right)}}\right) \tag{9}$$

Hier ist die entsprechende Schwingungsfrequenz

$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_k}\right)^{-1}}} \tag{10}$$

Auffallend ist, dass Summe und Differenz der Ströme in den beiden Kreisen mit konstanter Amplitude schwingen. Die Lösungen für die beiden Ströme sind

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(I_{1_0} + I_{2_0})\cos 2\pi\nu^+ t + \frac{1}{2}(I_{1_0} - I_{2_0})\cos 2\pi\nu^- t \tag{11}$$

und

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(I_{1_0} + I_{2_0})\cos 2\pi\nu^+ t - \frac{1}{2}(I_{1_0} - I_{2_0})\cos 2\pi\nu^- t. \tag{12}$$

Als Spezialfälle treten die beiden als Fundamentalschwingungen bezeichneten Vorgänge auf. Dies geschieht für $I_{1_0} = I_{2_0}$, d.h. Phase und Amplitude sind in beiden Kreisen gleich und für $I_{1_0} = -I_{2_0}$, also bei gleicher Amplitude aber gegenphasiger Schwingung. Die Fundamentalschwingungen haben die Frequenzen aus (8) und (10), wobei ν^- größer ist als ν^+.

Ebenso von besonderer Bedeutung ist die sogenannte Schwebung. Diese Phänomen tritt auf wenn nur ein Oszillator angeregt wird, so dass bei $t = 0$ gilt: $I_{1_0} \neq 0$ und$I_{2_0} = 0$. Die Ströme werden in diesem Fall beschrieben durch

$$I_1(t) = I_{1_0}\cos\frac{1}{2}\left(\omega^+ + \omega^-\right)t\cos\frac{1}{2}\left(\omega^+ - \omega^-\right)t \tag{13}$$

und

$$I_2(t) = I_{1_0}\sin\frac{1}{2}\left(\omega^+ + \omega^-\right)t\sin\frac{1}{2}\left(\omega^+ - \omega^-\right)t. \tag{14}$$

Wird die Näherung $\nu^+ \approx \nu^-$,d.h. $C_k \gg C$ gemacht dann ist $\frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-) \approx \omega^+$ und $\omega^- - \omega^+ \ll \omega^+$. Die Oszillatoren schwingen also mit einer Frequenz $1/2(\nu^+ + nu^-)$, die Amplitude der Schwingungen pendelt aber periodisch zwischen 0 und $I_{(1,2)_0}$. Die Frequenz mit der sich die Amplitude ändert ist die Schwebungsfrequenz $\nu^- - \nu^+$ und (viel) kleiner als die Frequenzen der beiden Ströme.

Deutlich erkennbar ist eine Schwebung in Abb. 2 dargestellt.

1.2 Frequenzabhängigkeit des Stromes in einem gekoppelten Schwingkreis

Anders als bei den zuvor betrachteten idealen Vorgängen mit einfacher Anregung soll nun das Verhalten gekoppelter Schwingkreise untersucht werden, wenn eine äußere Sinusspannung für eine erzwungene Schwingung sorgt. Die in der Realität immer vorhandene Dämpfung wird durch zwei ohmsche Widerstände R in das Schaltbild integriert, wie man in Abb. 3 sieht. Wieder wird von den Kirchhoffschen Regeln ausgegangen, um den Betrag von I_2 zu berechnen:

$$|I_2| = |U|\frac{1}{\sqrt{4\omega^2 C_k^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_k} - \omega C_k Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_k\right)^2}} := |U|\cdot|\lambda| \tag{15}$$

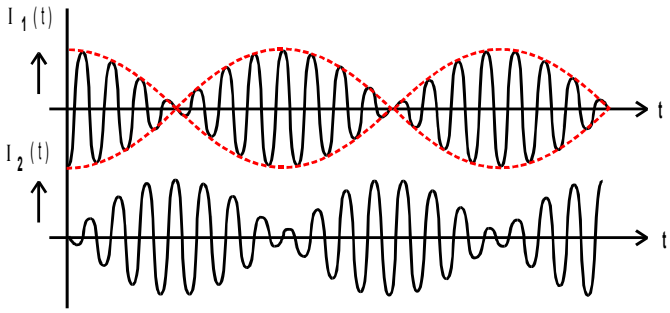


Abbildung 2: Schwebung

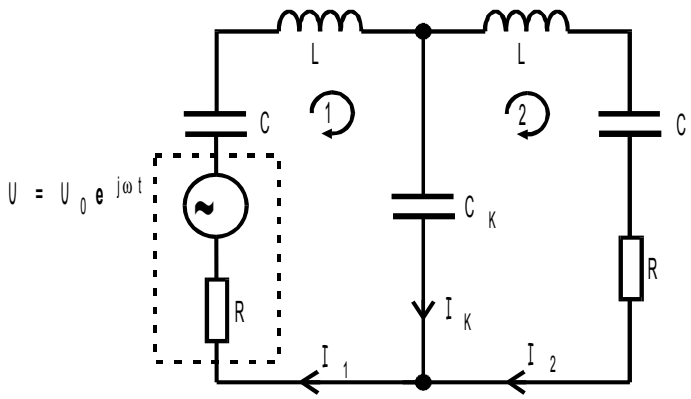


Abbildung 3: Reale Schwingung

mit

$$Z(\omega) := \omega L - \frac{1}{\omega}\{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_k}\}$$

und λ = Leitwert. Der Leitwert erreicht bei den beiden Fundamentalfrequenzen maximale Werte. Üblicherweise gilt

$$|\lambda(\omega^+)| \approx |\lambda(\omega^-)| \approx \frac{1}{2R} \tag{16}$$

2 Durchführung und Auswertung

Der Versuch wurde mit "Schaltkasten 1" durchgeführt, der folgende Eigenschaften hat:

$$C = 798 \pm 2pF$$

$$C_{sp} = 37 \pm 1pF$$

$$L = 31,90 \pm 0,05mH$$

$$R = 48\Omega$$

rel. Fehler von C_k : $0,25\%$

2.1 Vorbereitende Justierungen

Bevor der eigentliche Versuch beginnen kann müssen zunächst die beiden gekoppelten Schwingkreise aufeinander abgestimmt werden. Dies ist notwendig, da nur bei gleicher Resonanzfrequenz ein vollständiger Energietransfer zwischen Ihnen stattfinden kann. Der erste Schritt ist die Bestimmung der Resonanzfrequenz von Kreis 1.

Um die Frequenz möglichst einfach einstellen zu können wird sie zunächst berechnet:

$$f_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{31,9mH \cdot 798pF}} \approx 31544,5Hz$$

Die Messung erfolgt mit einer Schaltung nach Abb. 4 geschieht. Am Oszilloskop sind Generatorspannung und Schwingkreisstrom gegeneinander aufgetragen. Am Generator wird solange feingeregelt bis die Phasenverschiebung verschwindet, d.h. die sichtbare Lissajous-Figur zu einem Strich wird. Die zugehörige Frequenz wird an einem zusätzlich eingebauten Frequenzzähler zu 32875 ($\pm 0,5$)Hz abgelesen; C_k war auf 5,02 nF eingestellt.

Die Schaltung wird dann auf den zweiten Kreis übertragen und dort mit Hilfe der regelbaren Kapazität die gemessene Frequenz eingestellt.

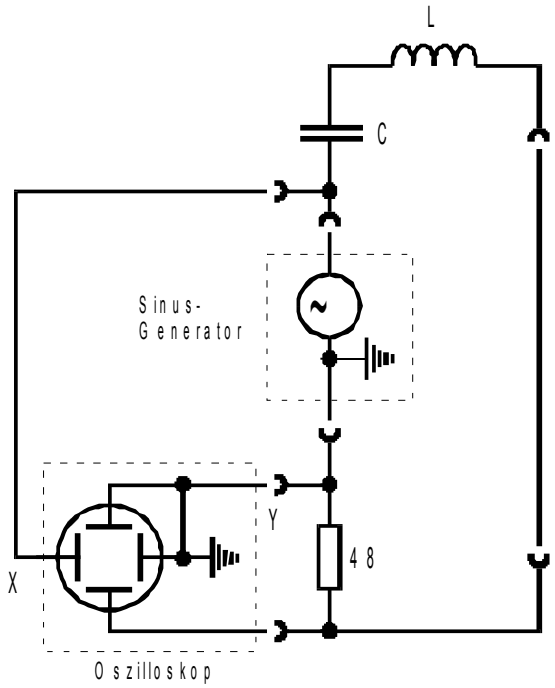


Abbildung 4: Bestimmung der Resonanzfrequenz

2.2 Verhältnis der Schwingungsfrequenzen

Hier soll nun das Verhältnis von Schwebungs- zu Stromfrequenz ermittelt werden. Es wird dazu eine Schaltung wie in Abb. 5 verwendet. Die Anregung der Schwingung erfolgte durch ein Rechtecksignal, wobei eine kleine Frequenz im Bereich von10^2 Hz gewählt wurde, um eine deutliche Trennung der beiden Frequenzen und damit ein gut ablesbares Schirmbild zu erreichen. Auf dem Oszilloskop ist der zeitliche Verlauf des Stromes erkennbar. Das Verhältnis der beiden Frequenzen wird dann durch Abzählen der Maxima der Stromschwingung die sich innerhalb einer Halbperiode der Schwebung befinden ermittelt. Dieser Vorgang wird für alle sieben im Bereich von 2nF bis 12nF einstellbaren Werte der Koppelkapazität C_k wiederholt. Wo die Auszählung bei aufeinander folgenden Halbperioden Unterschiedliche Werte ergab wurde der Mittelwert gebildet.

Um das Ergebnis einordnen zu können wird es mit einem gerechneten Verhält-

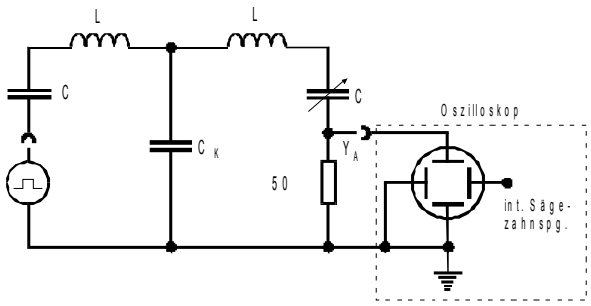


Abbildung 5: Verhältnis der Schwinungsfrequenzen

nis verglichen. Hierfür wird der Quotient $\frac{\nu^+ + \nu^-}{\nu^+ - \nu^-}$ benutzt. Wie in der Versuchsanleitung angegeben, wird für die Berechnung von ν^+ als Gesamtkapazität pro Schwingkreis $C_{ges} = C + C_{sp}$ angenommen, für ν^- hingegen $\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{1/2C_k}$. Die Messwerte sind in Tabelle 1 aufgelistet. Die weiteren Fehler wurden mittels Gauß'scher Fehlerfortpflanzung berechnet. Als experimentellen Fehler nehmen wir 1,5 an. Wie man bei dem Quotienten ablesen kann, liegen unsere experimentellen Werte innerhalb des Fehlers des theoretischen Wertes.

2.3 Fundamentalfrequenzen in Abhängigkeit von der Koppelkapazität

Die beiden Frequenzen ν^+ und ν^- der Fundamentalschwingungen sollen nun in Abhängigkeit von der Koppelkapazität C_k gemessen werden. Die zuvor verwendete Schaltung (Abb. 5) wird dahingehend modifiziert, dass das Rechteck- durch ein Sinussignal ersetzt wird und die Generatorspannung auch auf die X-Auslenkung des Oszilloskops gegeben wird.
C_k,ν^- und ν^+ waren gegeben. Dann haben wir jeweils die Summe und die Differenz der ν^+ und ν^- gebildet und zur Berechnung des Theoretischen Wertes folgende Formel benutzt:

$$Q_{theo} = \frac{(\nu^- + \nu^+)}{\nu^- - \nu^+}$$

Recht präzise werden die gesuchten Frequenzen mit Hilfe der Lissajous-Figuren eingestellt, welche für die Phasen 0 bzw π gerade verschwinden, d.h. zu diagonal verlaufenden Linien werden. Da die Frequenz ν^+ unabhängig von der Koppelkapazität ist wurde hier C_k nicht variiert, sondern nur bei der Bestimmung der

einzelnen ν^-.

Alle Ergebnisse sind in Tabelle 2 eingetragen; die gerechneten Werte wurden aus dem vorherigen Abschnitt übernommen.

2.4 Frequenzabhängigkeit der Ströme I_2 und I_k

Von Interesse ist nun der Verlauf der Ströme I_2 und I_k in dem gekoppelten Schwingungssystem in Abhängigkeit von der Frequenz. Der Verlauf wird mit einem XY-Schreiber aufgezeichnet. Dieser muss jedoch vor Beginn der Aufzeichnung kalibriert werden. Dazu werden zunächst am Wobbelgenerator die entsprechenden Frequenzen (als Startfrequenz 25030 Hz, als Endfrequenz 50020 Hz) eingestellt. Für die beiden Achsen wird dann nur der jeweils zuständige Eingang angeschlossen und der Wobbelgenerator einmal durchgefahren, wobei mit der ”Hold”-Funktion einige Punkte markiert werden deren Wert an den Geräten abgelesen werden kann. Der Strom kann dabei einfach aus dem tatsächlich gemessenen Spannungsabfall am 48Ω Widerstand nach $I = U/R$ errechnet werden.

Für die Aufnahme der Stromkurven wurde dann eine Schaltung gemäß Abb. 7 benutzt. Für die Stromkurve I_k wird der Spannungsabfall an dem gestrichelten

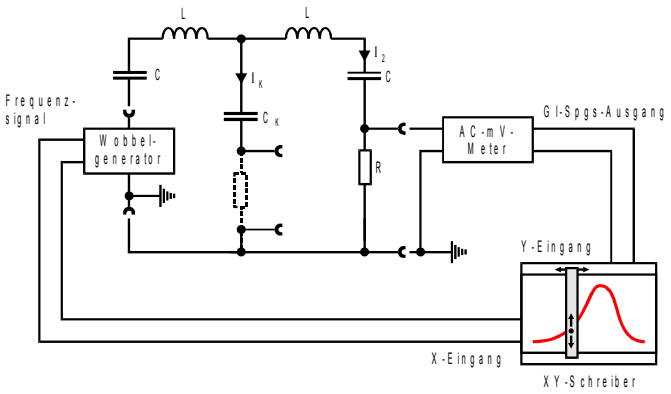


Abbildung 6: Frequenzabhänigkeit der Ströme

Widerstand gemessen.

Die in das Diagramm (siehe Anhang) eingetragenen Wertepaare sind mit Hilfe von (15) berechnet worden, wobei wie vorgegeben für Kreis 1 $R = 85\Omega$, für Kreis 2 $R = 73\Omega$ gesetzt wird.

Eine Betrachtung der erhaltenen Kurven zeigt die prinzipielle Übereinstimmung von Theorie und Experiment. In der Stromkurve für I_2 sind deutlich die beiden Maxima bei den Fundamentalfrequenzen zu erkennen. In derjenigen für I_k ist nur ein Maximum zu sehen, da wie theoretisch vorhergesagt I_k bei der ersten Fundamentalfrequenz verschwindet. Die Abweichungen werden z.B. durch Dämpfungsverluste, aber auch ein Einbrechen der Generatorspannung bei den Resonanzfrequenzen, verursacht. Dieser Effekt wurde mit einer zusätzlichen Kurve graphisch verdeutlicht (siehe Anhang).

Auswertung

C_k	ν^-	ν^+	$\nu^- + \nu^+$	$\nu^- - \nu^+$	$Quotient_{exp}$	$Quotient_{theo}$
2.03 ± 0,01	42159 ± 66	31544 ± 49	73703 ± 82	10615 ± 82	8 ± 1	6.94 ± 0.10
3.00 ± 0,01	39044 ± 61	31544 ± 49	70588 ± 78	7500 ± 78	10 ± 1	9.41 ± 0.10
4.00 ± 0,01	37311 ± 58	31544 ± 49	68855 ± 76	5767 ± 76	11 ± 1	11.94 ± 0.20
5.02 ± 0,01	36213 ± 57	31544 ± 49	67757 ± 75	4669 ± 75	14 ± 1	14.51 ± 0.20
6.47 ± 0,02	35221 ± 55	31544 ± 49	66765 ± 74	3677 ± 74	18 ± 1	18.16 ± 0.40
8.00 ± 0,02	34548 ± 54	31544 ± 49	66092 ± 73	3004 ± 73	22 ± 1	22.78 ± 0.60
9.99 ± 0,25	33971 ± 53	31544 ± 49	65515 ± 72	2427 ± 72	26 ± 1	26.99 ± 0.90

Tabelle 1 Auswertung Teil a

C_k	ν^-	ν^+	ν^+_{exp}	ν^-_{exp}
2.03 ± 0,01	42159 ± 66	31544 ± 49	30655 ± 100	40214 ± 100
3.00 ± 0,01	39044 ± 61	31544 ± 49	30655 ± 100	37493 ± 100
4.00 ± 0,01	37311 ± 58	31544 ± 49	30655 ± 100	35945 ± 100
5.02 ± 0,01	36213 ± 57	31544 ± 49	30655 ± 100	34967 ± 100
6.47 ± 0,02	35221 ± 55	31544 ± 49	30655 ± 100	34075 ± 100
8.00 ± 0,02	34548 ± 54	31544 ± 49	30655 ± 100	33470 ± 100
9.99 ± 0,25	33971 ± 53	31544 ± 49	30655 ± 100	32942 ± 100

Tabelle 2 Auswertung Teil b

Abbildung 7: Frequenzabhänigkeit der Ströme

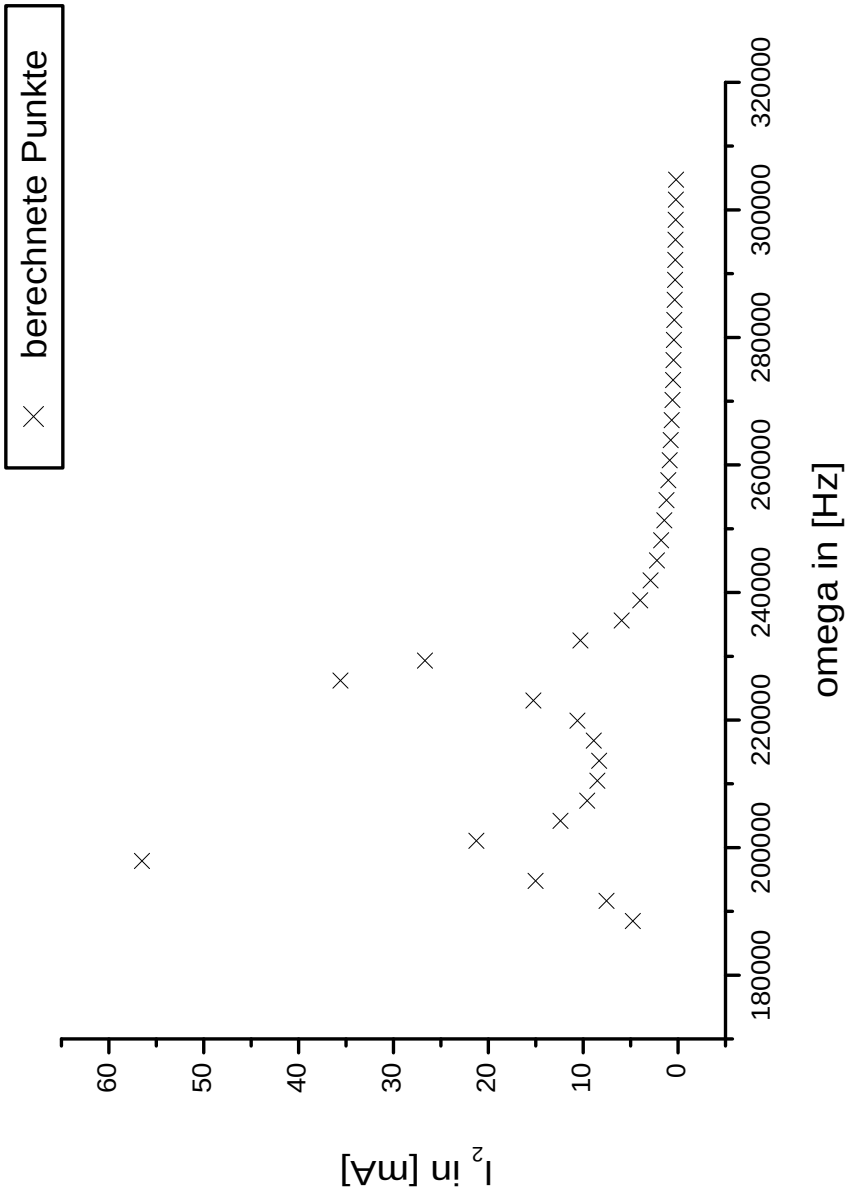


Abbildung 8: Theoriekurve - Strom gegen omega