Praktikumsprotokoll

Versuch Nr. 351
Fourier-Analyse und Synthese

Frank Hommes
und
Kilian Klug

Durchgeführt am:
13 Januar 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Theoretische Hintergründe **3**

3 Durchführung und Auswertung **4**
3.1 Fourier-Analyse 4
3.2 Fourier-Synthese 6

4 Anhang **7**

1 Einleitung

In diesem Versuch mit dem Titel ”Fourier-Analyse und Synthese” sollen elektrische Schwingungen untersucht werden. Drei verschiedene Signalformen werden zum einen auf ihre Fourier-Amplituden hin vermessen und zum anderen aus Oberwellen synthetisiert. Die erhaltenen Daten werden dann mit errechneten Werten verglichen.

2 Theoretische Hintergründe

Die Fourier-Analyse bzw. Synthese befasst sich mit periodischen Funktionen. Periodische Vorgänge treten sehr häufig in allen Gebieten der Physik auf und sind daher von großer Bedeutung. Entsprechende Größen kann man durch Funktionen beschreiben, welche die Eigenschaft

$$f(t+T) = f(t) \tag{1}$$

besitzen. Hierbei nimmt die beschriebene Größe t also nach einer Periodendauer T wieder ihren anfänglichen Wert an. Der Vorgang kann sowohl zeitlich als auch räumlich periodisch sein.

Besonders grundlegend sind die Sinus- und Cosinusfunktionen, da aus ihnen (fast) alle periodischen Vorgänge zusammengesetzt werden können. Das wichtigste Mittel dazu ist das Fouriersche Theorem. Nach ihm stellt die Reihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{2\pi}{T}t + b_n \sin n\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{2}$$

bei gleichmäßiger Konvergenz eine periodische Funktion dar. Die Fourierkoeffizienten a_n und b_n berechnen sich nach

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \tag{3}$$

und

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \tag{4}$$

mit $n = 1,2,3,\ldots$.

Die Frequenz $\nu_1 = 1/T$ ist die Grundfrequenz des Vorganges. Zusätzlich treten im allgemeinen nur ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz auf, die man als Oberschwingungen bezeichnet.

Die Koeffizienten a_n und b_n beschreiben die Amplituden, ihre Berechnung bezeichnet man als Fourier-Analyse. Dabei verschwinden alle a_n bei ungeraden Funktionen, bei geraden Funktionen entsprechend alle b_n.

Die Amplituden der Teilschwingungen als Funktion der Frequenz dargestellt nennt man das Spektrum der Schwingung.

Um das gesamte Spektrum einer zeitabhängigen Funktion zu bestimmen wird die Fourier-Transformation benutzt:

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\nu t}\, dt \tag{5}$$

Ist f periodisch, so ist das Spektrum eine Reihe von δ-Funktionen, ansonsten erhält man ein kontinuierliches Spektrum.

3 Durchführung und Auswertung

Als Vorbereitung auf den Versuch sollten zunächst die Fourier-Koeffizienten für drei beliebige Signalformen berechnet werden. Wir haben dafür Dreiecks-, Rechteck- und Sägezahnspannungen gewählt. Die Ergebnisse erhält man durch (2) bzw. (3) und (4):

Die Dreieckspannung haben wir als gerade Funktion definiert, so dass sämtliche b_n null sind und es gilt

$$a_n = \frac{4\lambda}{\pi^2 n^2}$$

mit λ = Amplitude des Signals und $n = 1,3,5,7,\ldots$.

Die Rechteckspannung haben wir als ungerade Funktion definiert und deshalb sind alle $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{4\lambda}{\pi n}, n = 1,3,5,7,\ldots$$

Die Sägezahnspannung wurde ebenfalls eine ungerade Funktion mit $a_n = 0$ und

$$b_n = -\frac{2\lambda}{\pi n}, n = 1,2,3,4,5,6,\ldots$$

Man erkennt hier bereits, dass bei den Messungen für Rechteck- und Dreieckssignal nur Maxima bei ungeraden Vielfachen der Grundfrequenz zu erwarten sind, beim Sägezahnsignal jedoch bei allen ganzzahligen Vielfachen.

Für die spätere Synthese ist hier schon zu erkennen, dass die Rechteck- und Sägazahnspannung ein Abklingverhalten der Amplituden $\propto \frac{1}{n}$ zeigen; bei der Dreickspannung ist es $\propto \frac{1}{n^2}$.

3.1 Fourier-Analyse

Für die rechnergestützte Fourier-Analyse mittels Fourier-Transformation wurde ein Aufbau wie schematisch in Abb. 1 dargestellt benutzt. Mit diesem sollten die

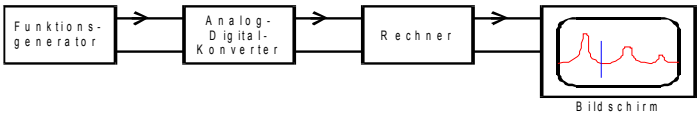


Abbildung 1: schematische Darstellung der auf der Grundlage der fouriertransformation arbeitenden Messapperatur

ersten 9 von null verschiedenen Fourier-Amplituden gemessen werden. Zusätzlich wurden die ersten drei Stellen überprüft, an denen man eine Amplitude von null erwartet. Hier zeigt sich, dass die Werte zwar sehr klein gegen die anderen Maxima sind, jedoch eindeutig größer null. Die ist bedingt durch den nur endlichen Zeitraum der Messung (und damit des Bereichs über den integriert wird) sowie durch die Geräte selbst - hier auftretendes Rauschen und zufällige Nebeneffekte lassen sich mit vertretbarem Aufwand nur schwerlich viel besser unterdrücken.

Wichtig ist hier, dass im Experiment nur über einen endlichen Zeitraum gemessen und damit auch integriert wird, in der Theorie aber eine Integration bis ∞ gefordert wird. Um die (systematischen) Fehler, die daraus resultieren, vernachlässigbar gering zu halten, muss das sogenannte Abtasttheorem

$$\nu_A > 2\nu_{max} \tag{6}$$

berücksichtigt werden (ν_A =Abtastfrequenz, ν_{max} = höchste Frequenz im Spektrum).

Der Betrag von $\tilde{f}$ - den der Rechner intern unter Verwendung der Simpson-Regel für die Integration ermittelt - wird auf dem Bildschirm in Abhängigkeit von der Frequenz dargestellt. Die entsprechenden Werte sind in den Tabellen im Anhang abzulesen. Hier wurde jeweils der gemessene Wert der ersten Oberwelle zugrunde gelegt, der jedoch auch schon nicht ganz genau dem engestellten Wert entsprach, wodurch eine gewisse Ungenauigkeit erzeugt wird. Diese ist der Qualität der verwendeten Geräte zuzuschreiben.

Die eingestellte Signalfrequenz betrug jeweils 4 Hz bei einer Spannung von 1 V. Die Schrittweite bei der Abtastung ist für alle Messungen 1 mHz. Die Bedingung des Abtasttheorems wurde mit einer Abtastfrequenz von 222 Hz Der vor der Messung durchgeführte Test des Analog-Digital-Converters (ADC) ergab einen Offset von -6 mV auf Kanal 8.

Die auftretenden Abweichungen bei den Frequenzen sind nur unbedeutend im promille-Bereich, bei den Amplituden sind sie größer jedoch auch hier nur im Bereich von wenigen Prozent. Wie erwähnt kommt hier der endliche Zeitraum der Messung zum tragen, sowie die z.T. absolut gesehen kleinen Werte, die für Mess-

fehler anfälliger sind. Zudem ist das verwendete Gerät bei der gewählten niedriegen Frequenz von 4 Hz offernbar nicht so genau wie bei größeren Frequenzen. Insgesamt sind die Abweichungen jedoch zufriedenstellend klein, so dass grundlegende Fehler nicht zu vermuten sind.

3.2 Fourier-Synthese

Um nun die Fourier Synthese experimentell nachzuvollziehen, wird ein Oberwellengenarator benutzt, der in der Lage ist, eine Anzahl von Sinusschwingungen zu liefern, die ein konstantes Phasenverhältnis haben und deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der ersten sind.

Für die Justierung des Generators wird dieser zunächst an ein Oszilloskop angeschlossen, welches auf XY-Betrieb - mit der Grundschwingung auf der X- und der n-ten Oberwelle auf der Y-Achse - geschaltet ist. Auf dem Oszilloskop erscheint eine Lissajous-Figur, deren Gestalt davon abhängt, ob ein gerad- oder ungeradzahliges n gewählt wurde. Die entsprechenden Figuren sind beispielhaft in Abb. 2 zu sehen. Die Phasenbeziehungen zwischen den einzelnen Oberwellen



Abbildung 2: Lissajour Figuren aus zwei Schwingkreisen

werden mittels der ”Phase”-Knöpfe am Oberwellengenerator eingestellt. Bei geraden Oberwellen ergibt sich das Problem, dass die Lissajous-Figuren nicht eindeutig sind, so dass z.T. mit dem ”180°-Phasenschalter” experimentiert werden musste, um das richtige Ergebnis zu erhalten.

Anschließend müssen noch die Amplituden eingeregelt werden. Hierzu wird die Amplitude der ersten Oberschwingung auf die maximal einstellbare Größe gebracht. Die jeweiligen Amplituden wurden erst nach dem bereits oben erwähnten Abklingverhältnis für die einzelnen Schwingungen berechnet und dann mit Hilfe eines angeschlossenen AC-Millivoltmeters eingestellt. Als Ausgangspunkt für die Berechnungen diente der für die Amplitude der ersten Oberwelle gemessene Wert von 637 mV.

Die erreichten Signale wurden mittels Thermodruck dokumentiert und sind im Anhang beigefügt.

Der Oberwellengenerator ist in der Lage Komponenten mit n = 1 bis 10 zu liefern. Damit lies sich bereits ein recht gutes Dreiecksignal erzeugen, während

Rechteck- und Sägezahnsignal noch deutliche Unzulänglichkeiten aufweisen. Dies ist dadurch zu erklären, dass Rechteck- und Sägezahnform Unstetigkeitsstellen aufweisen, an denen das sogenannte Gibbssche Phänomen zum tragen kommt. Dieses beschreibt das Überschwingen an den Unstetigkeitsstellen, das auch durch eine größere Anzahl an Komponenten für die Zusammensetzung des Signals sich nicht vermindern lässt - im Gegensatz zu den Abweichungen von der Idealform in anderen Bereichen.

Bei der Bertachtung des erzeugten Rechtecksignals fällt nachträglich auf, dass möglicherweise die Phase einer Oberschwingung nicht optimal eingestellt wurde. Jedoch ist dies auch nur schwer zu realisieren gewesen, da mit höherem n die Amplituden immer kleiner werden, wodurch das Schirmbild am Oszilloskop unscharf und z.T. unstabil wurde.

4 Anhang

Nr. des Maximums	gemessene Frequenz [Hz]	gemessene Amplitude	theoretische Frequenz [Hz]	theoretische Amplitude	% Abweichung Frequenz	% Abweichung Amplitude
1	4	723.69	--	--	--	--
2	8.01	0.72	8.01	0	0	--
3	12.01	81.43	12.01	80.41	0	1.25
4	16.01	0.87	16.01	0	0,0001	--
5	20.02	29.37	20.02	28.95	< 0,0001	1.44
6	24.02	0.73	24.02	0	< 0,0001	--
7	28.02	15.45	28.02	14.77	< 0,0001	4.41
9	36.03	9.06	36.03	8.93	< 0,0001	1.37
11	44.03	6.18	44.03	5.98	< 0,0001	3.28
13	52.04	4.2	52.04	4.28	< 0,0001	1.88
15	60.05	3.24	60.05	3.22	0,0001	0.86
17	68.06	2.49	68.05	2.5	0,0001	0.52

Abbildung 3: Tabelle 1: Dreickspannung

Nr. des Maximums	gemessene Frequenz [Hz]	gemessene Amplitude	theoretische Frequenz [Hz]	theoretische Amplitude	% Abweichung Frequenz	% Abweichung Amplitude
1	4.04	1026.15	--	--	--	--
2	8.09	2.06	8.09	0	0	--
3	12.13	339.91	12.13	342.05	0.08	0.63
4	16.18	0.63	16.18	0	0	--
5	20.22	204.46	20.22	205.23	0.1	0.38
6	24.26	0.71	24.26	0	0	--
7	28.31	146.76	28.31	146.59	0.07	0.12
9	36.4	113.83	36.4	114.02	0.08	0.17
11	44.48	93.06	44.48	93.29	0	0.24
13	52.58	78.98	52.57	78.94	0.1	0.05
15	60.66	68.52	60.66	68.41	0.1	0.17
17	68.75	60.66	68.75	60.36	0.07	0.48

Abbildung 4: Tabelle 2: Rechteckspannung

Nr. des Maximums	gemessene Frequenz [Hz]	gemessene Amplitude	theoretische Frequenz [Hz]	theoretische Amplitude	% Abweichung Frequenz	% Abweichung Amplitude
1	3.94	646.66	--	--	--	--
2	7.89	322.81	7.89	323.33	0.01	0.16
3	11.83	215.17	11.83	215.55	0.01	0.18
4	15.78	161.98	15.78	161.67	0.01	0.19
5	19.72	128.93	19.72	129.33	0.01	0.31
6	23.66	107.52	23.66	107.78	0.01	0.24
7	27.61	92.38	27.61	92.38	0.01	0
8	31.55	80.72	31.55	80.83	0.01	0.14
9	35.49	71.45	35.5	71.85	0.01	0.57

Abbildung 5: Tabelle 3: Sägezahnspannung