Praktikumsprotokoll

Versuch Nr. 104
Der Doppler Effekt

Frank Hommes
und
Kilian Klug

Durchgeführt am:
20 Januar 2004

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Theoretische Hintergründe **3**

3 Durchführung und Auswertung **3**
3.1 Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger 4
3.2 Frequenz 6
3.2.1 Ruhefrequenz bei v=0 7
3.2.2 Frequenz bei v $\neq$ 0 8
3.2.3 Schwebungsmethode 8
3.3 Schallgeschwindigkeit 10

4 Unterschied zwischen f_Q und f_E **11**

5 Δ f in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit **12**

6 Studentscher t-Test **12**
6.1 Vergleich der Wellenlängenmessng mit der direkten Frequenzmessung 13
6.2 Vergleich der direkten Frequenzmessung mit der Schwebungsmethode 13
6.3 Vergleich der Wellenlängenmessung mit der Schwebungsmethode 14

7 Anhang **14**

1 Einleitung

Der für diesen Versuch titelgebende Doppler-Effekt, ist ein in der Natur sehr weit verbreitetes Phänomen. Er tritt bei jeglichen Arten von Wellen auf und ist deshalb von großem Interesse.

2 Theoretische Hintergründe

Wird eine Welle mit der Frequenz f_0 ausgesendet, während sich Quelle und Empfänger relativ zueinander bewegen, so kann man den Doppler Effekt beobachten. Er zeigt sich in einer Veränderung der vom Empfänger wahrgenommenen Frequenz f gegenüber f_0.

Die Messungen sollen an Schallwellen durchgeführt werden, die Wellenausbreitung ist also an ein Medium gebunden. Hierbei wird unterschieden, ob sich der Empfänger auf die Quelle zu bewegt und dann

$$f_E = f_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \tag{1}$$

gilt, oder ob sich die Quelle auf den Empfänger zu bewegt. In diesem Fall gilt

$$f_Q = v_0 \frac{1}{1 - \frac{v}{c}}. \tag{2}$$

Für den allgemeineren Fall, dass sich sowohl Quelle als auch Empfänger bewegen, findet man

$$f = f_0 \frac{1 + v_E/c}{1 - v_Q/c}. \tag{3}$$

Im Bereich der Optik (Elektromagnetische Wellen) jedoch, wo Relativgeschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit möglich sind, muss die Frequenzverschiebung nach der speziellen Relativitätstheorie berechnet werden. Es ist dann

$$f' = f_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}{1 - v/c_0}. \tag{4}$$

Diesen relativistischen Doppler-Effekt nennt man auch quadratischen Doppler-Effekt.

3 Durchführung und Auswertung

Im Experiment soll Gleichung 2 überprüft werden. Hierfür müssen die Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger, die Schallgeschwindigkeit und die Frequenzen bestimmt werden.

Die auftretenden Geschwindigkeiten werden mit v_{pos} bezeichnet wenn sich die Schallquelle auf den Empfänger zu bewegt und mit v_{neg} wenn sich die Schallquelle vom Empfänger entfernt.

3.1 Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger

Um die Relativgeschwindigkeit zwischen der Signalquelle (Lautsprecher) und dem Empfänger (Mikrophon) zu messen wird ein Versuchsaufbau wie in Abb. 1 verwendet. Der Einfachheit halber wird der Empfänger nicht bewegt, so dass

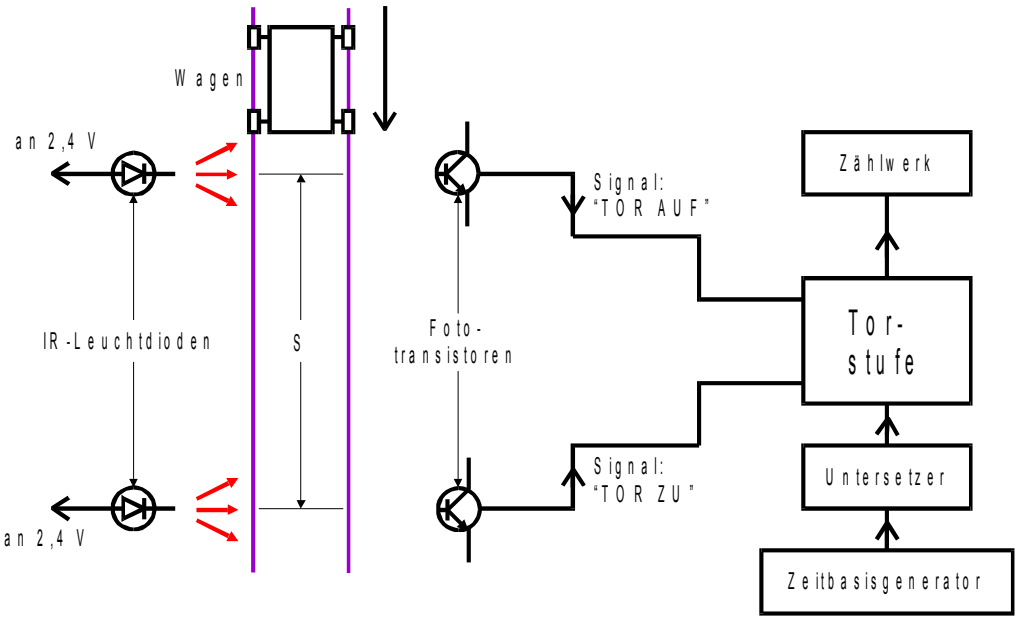


Abbildung 1: Aufbau zur Messung der verschiedenen Geschwindigkeiten

nur die Geschwindigkeit des Wagens gemessen werden muss. Dieser wird mit einem Synchronmotor angetrieben und kann mittels einer Zehngangschaltung mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegt werden.

Der Aufbau wurde mittels einer digitalen Schaltung aus verschiedenen Elementen realisiert, wie in Abb. 2 dargestellt. Diese digitalen Bausteine können an ihren Ausgängen entweder ein ”H-” oder ein ”L-”Potential liefern, je nachdem welche Potentiale an ihren Eingängen anliegen. Somit lassen dich die Bausteine auf ihre

logischen Funktionen zurückführen. Zur Verfügung standen hier Und-Gatter, Nicht-Und-Gatter, bistabile Kippstufen (Flip-Flop), monostabile Kippstufen (Univibrator) und Schmitt-Trigger (Schwellwertschalter).

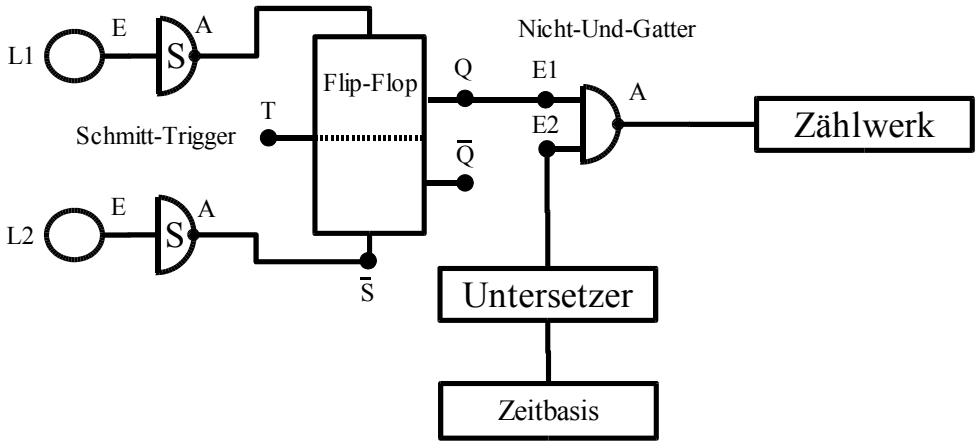


Abbildung 2: Logikschaltung zur Messung der Relativgeschwindigkeit

Die Lichtschranken liefern bei Unterbrechung durch den Wagen ein Signal, welches zunächst in einen Schmitt-Trigger läuft und dort in ein für die weiteren Elemente der Schaltung verwertbares, digitales Signal umgewandelt wird. Der resultierende L-Impuls am Ausgang des Schmitt-Triggers, welcher damit auch kurzzeitig am $\overline{R}$-Eingang des Flip-Flops anliegt, schaltet den Q-Ausgang des Flip-Flops auf L-Potential. Über das nachfolgende Nicht-Und-Gatter nimmt das an dessen Ausgang angeschlossene Zählwerk nun die Impulse des von der Zeitbasis gesteuerten Untersetzers entgegen.

Nach dem der Wagen die erste Lichtschranke passiert hatte lag der $\overline{R}$-Eingang des Flip-Flops wieder auf H-Potential. Jedoch wird der Q-Ausgang erst durch den L-Impuls auf den $\overline{S}$-Eingang wieder auf H geschaltet, der durch das Durchfahren der zweiten Lichtschranke vom Wagen ausgelöst wird. Das am E_1-Eingang anliegende Potential ändert sich dadurch, was die Verbindung des Zählwerks mit dem Untersetzer (bzw. den Zeitbasis-Signalen) unterbricht. Hier stoppt also die Zeitmessung.
Mit einem Maßband haben wir den Abstand der Lichtschranken zu

$$s = 57,2(\pm 0,2)\text{cm}$$

gemessen.

Die Geschwindigkeit ergibt sich mit den gewonnen Daten sehr einfach nach

$$v = \frac{s}{t}.$$

Um ein statistisches Ergebniss für die vom Wagen benötigte Zeit zu erhalten, wurde die Messung für jede Geschwindigkeit sechs mal wiederholt.

Die entsprechenden Werte sind tabellarisch im Anhang aufgeführt.

3.2 Frequenz

Es müssen zwei Frequenzmessungen durchgeführt werden. Zum einen soll die Frequenz bei $v = 0$ gemessen werden, zum anderen diejenige bei bewegtem Wagen, also $v \neq 0$. Für beide wird im Prinzip der gleich Aufbau benutzt (siehe Abb. 3). Bei ruhendem Wagen wird Messung in Gang gesetzt, indem manuell die Lichtschranke unterbrochen wird. Bei der zweiten Messung mit bewegtem Wagen übernimmt dies der Wagen selbst. Auch hier wurde der Aufbau mit einer digitalen Schaltung

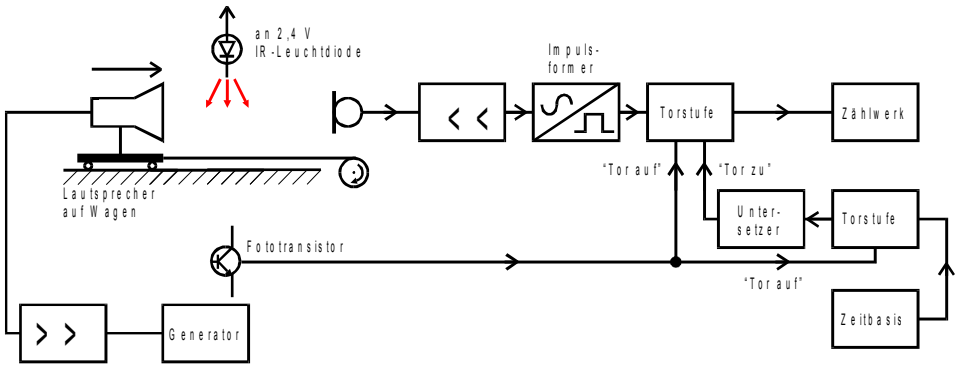


Abbildung 3: Aufbau zur Frequenzmessung

realisiert. Diese ist in Abb. 4 schematisch dargestellt.

Der Lautsprecher sendet, wie vom Generator vorgegeben Schall aus, der vom Mikrophon aufgefangen wird. Dieses ist über einen Verstärker und einen Rechteck-Impulsformer an ein Und-Gatter angeschlossen. Das Zählwerk registriert die Signale jedoch nur wenn auch am zweiten Eingang des Und-Gatters ein entsprechendes Potential anliegt, welches über den Q-Ausgang des vorgeschalteten Flip-Flops gesteuert wird.

Dies erfolgt am $\overline{S}$-Eingang über das low-Signal, welches die erste Lichtschranke bei einer Unterbrechung liefert.

Das anfängliche H-Potential am $\overline{R}$-Eingang des Flip-Flops wird letztendlich vom Untersetzer geliefert, welcher über ein zweites Und-Gatter mit dem Q-Ausgang des Flip-Flops, sowie einer Zeitbasis (1μs) verbunden ist.

Der Untersetzer kann als eine Art Rückwertszähler betrachtet werden und schaltet nach Ablauf einer festen Zeit am Ausgang auf H-Potential. Dieses wird zunächst auf beide Eingänge eines Nicht-Und-Gatters gegeben, welches somit das Potential auf L invertiert.

Die von der nachfolgenden monostabilen Kippstufe für die Zeit $t = ln2RC$ gelieferten Impulse laufen dann in den $\overline{R}$-Eingang des Flip-Flops.

Da mittlerweile die Lichtschranke nicht mehr unterbrochen ist, liegt am $\overline{S}$-Eingang des Flip-Flops wieder H-Potential an.

Auf diese Weise wird das Zählwerk, das durch das Unterbrechen der Lichtschranke gestartet wurde, nach einer bekannten, vom Untersetzer abgezählten Zeitspanne wieder gestoppt.

Um die Schaltung für die nächste Messung wieder zurückzustellen genügt ein H-Impuls.

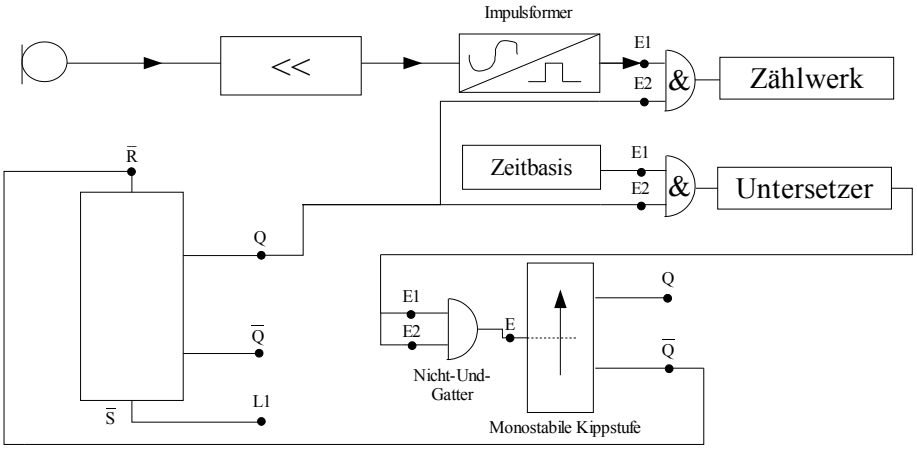


Abbildung 4: Logikschaltung zur Frequenzmessung

3.2.1 Ruhefrequenz bei v=0

Zunächst wurde die Ruhefrequenz gemessen, d.h. die Frequenz f_0 des an den Generator angeschlossenen, ruhenden Lautsprechers. Auch hier wurde die Messung

mehrfach durchgeführt um einen Mittelwert zu erhalten. Mit den untenstehenden Messergebnissen ergibt sich als Mittelwert der Frequenz:

$$f_0 = 20741,6(\pm 0,2)Hz.$$

f [Hz]	Abweichungsquadrate
20742	0,16
20742	0,16
20741	0,36
20741	0,36
20741	0,36
20742	0,16
20742	0,16
20742	0,16
20742	0,16
20741	0,36

3.2.2 Frequenz bei v $\neq 0$

Für die Frequenzmessung bei fahrendem Wagen wurden fünf verschiedene Geschwindigkeiten (”Gänge”) ausgewählt. Für diese wurde jeweils die Frequenz sowohl bei positivem als auch bei negativem v gemessen - also bei Bewegung des Senders auf das Mikrophon zu und von ihm weg. Jede Messung wurde fünf mal wiederholt. Wegen der besseren Übersichtlichkeit werden hier direkt die Mittelwerte der Messergebnisse angegeben (die kompletten Messwerttabellen sind als Kopie im Anhang).

Es muss hier angemerkt werden, dass der an zwei Stellen in der Tabelle auftauchende Fehler von ”$\pm 0,0$” keineswegs bedeutet, dass der Wert nicht fehlerbehaftet ist. Der Fehler war jedoch nicht mit den verwendeten Geräten zu registrieren (z.B. aufgrund zu geringer Genauigkeit), wie dies auch weiter unten bei den Messungen nach der Scwhwebungsmethode z.T. der Fall ist.

”Gang”	$\overline{f}(v_{pos})$	Δf [Hz]	$\overline{f}(v_{neg})$	Δf [Hz]
6	20744,0 $(\pm 0,0)$	2,4	20738,0 $(\pm 0,0)$	-3,6
18	20750,8 $(\pm 0,2)$	9,2	20733,2 $(\pm 0,2)$	-8,4
30	20756,2 $(\pm 0,6)$	14,6	20727,0 $(\pm 0,0)$	-14,6
42	20762,8 $(\pm 0,2)$	21,2	20720,8 $(\pm 0,2)$	-20,8
54	20768,2 $(\pm 0,2)$	26,6	20714,6 $(\pm 0,2)$	-27,0

3.2.3 Schwebungsmethode

Zusätzlich soll nun noch die Frequenz bei $v \neq 0$ mit einer anderen Methode - der sogenannten Schwebungsmethode - ermittelt werden. Der verwendete Versuchsaufbau

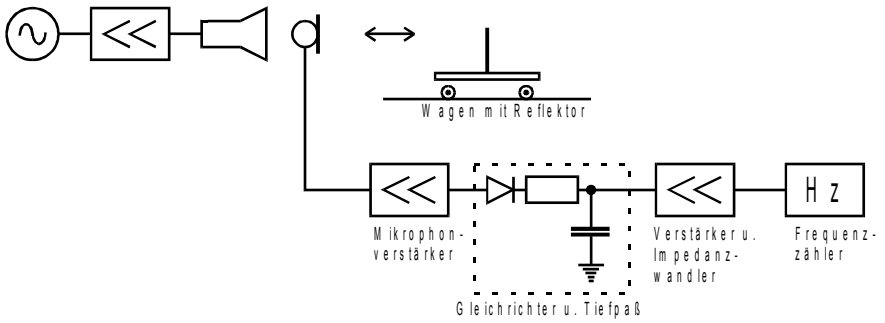


Abbildung 5: Aufbau zur Frequenzmessung nach der Schwebungsmethode

ist schematisch in Abb. 5 dargestellt. Als Schwebung bezeichnet man die (verhältnissmäßig langsame) Modulation der Amplitude einer (schnelleren) Schwingung. Diese Phänomen tritt also nur auf bei zwei Signalquellen. In diesem Fall wird eine Schwebung dadurch erzeugt, dass sowohl Schall vom ruhenden Lautsprecher direkt auf das Mikrophon trifft, als auch vom bewegten Reflektor zurückgeworfen wird. Da der Reflektor bzgl. des ruhenden Empfängers sich mit der Geschwindigkeit $2v_{pos}$ bewegt, hat man hier also zwei Signale. Um nur die Schwebungsfrequenz zu sehen, wird das Signal, welches das Mikrophon liefert, durch einen Tiefpass geschleift. Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt werden, kann man am Frequenzzähler das gesuchte Δf ablesen.

$$2\pi f_0 RC \gg 1$$

und

$$2\pi \Delta f RC \ll 1$$

Um diesen Bedingungen gerecht zu werden wurde bei vorgegebenem R = 10kΩ eine Kapazität von C = 100nF gewählt.

Die Messung wurde für fünf verschiedene Geschwindigkeiten jeweils fünf mal durchgeführt. Auch wenn z.T. fünf mal der gleiche Wert gemessen wurde ist dennoch nicht davon auszugehen, dass man eine Fehlerfreie Messung durchgeführt hat. Vielmehr ist entweder die Anzahl der Messungen zu klein oder die Genauigkeit der Geräte zu gering um die Fehler zu registrieren.

Die Mittelwerte der Messreihen sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

”Gang”	Δ f (ν_{pos}) [Hz]
6	7,0 $(\pm 0,0)$
18	18,2 $(\pm 0,2)$
30	30,0 $(\pm 0,0)$
42	42,0 $(\pm 0,0)$
54	53,6 $(\pm 0,2)$

3.3 Schallgeschwindigkeit

Die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit soll hier mittels einer Messung der Wellenlänge durchgeführt werden. Es wird dafür ein Aufbau gemäß Abb. 6 verwendet. Durch drehen der Mikrometerschraube kann der Sender sehr präzise bewegt werden.

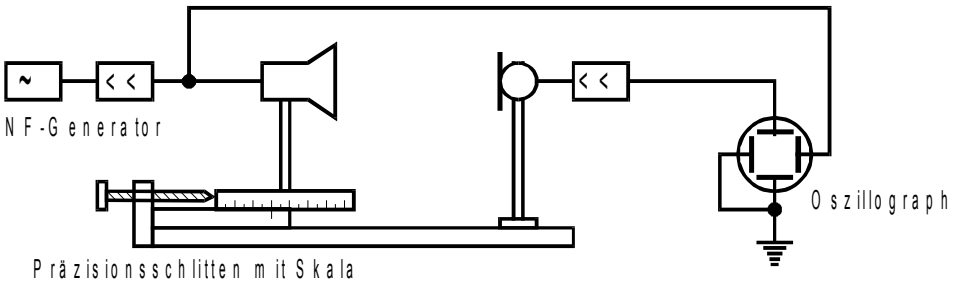


Abbildung 6: Messung der Schallgeschwindigkeit

Die vom Mikrophon erzeugte Signalspannung wird auf den Y-Eingang des Oszilloskops gelegt, während auf den X-Eingang die Generatorspannung gegeben wird. Am Oszilloskop lassen sich dann die auftretenden Lissajousfiguren zu Linien entarten. Diese Linien treten bei einem Phasenunterschied von 0 und π auf, so dass zwischen zwei solchen Punkten genau eine halbe Wellenlänge liegt. Der zurückgelegte Weg wird an der Skala der Mikrometerschraube abgelesen. Es ergaben sich folgende Ergebnisse:

Punkte mit Phase 0 oder π	gegenphasige Punkte	$\frac{\lambda}{2}$	λ[mm]	$\frac{1}{\lambda}$ [$\frac{1}{\mathrm{m}}$]
6.28	14.51	8.32	16.64	60.75
14.51	22.97	8.46	16.92	59.10
22.97	31.41	8.44	16.88	59.24
31.41	39.69	8.28	16.56	60.38
39.69	47.99	8.30	16.60	60.24
		$\overline{\lambda} =$	16.68	60.0
		$S_\lambda =$	0.09	0.3

Mit diesen Werten erhält man nach $c = f_0 \cdot \lambda$ für die Schallgeschwindigkeit $c = 20741,6(\pm 0,29Hz * 16,68(\pm 0,09)mm = 345,97(\pm 1,86)m/s$. Der Fehler der Schallgeschwindigkeit berechnet sich wie folgt:

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_{f0}^2 + \sigma_\lambda^2}$$

4 Unterschied zwischen f_Q und f_E

Nachdem nun die Apparaturdaten und sämtliche Messwerte ermittelt wurden, soll nun überprüft werden, ob der o.g. theoretische Unterschied zwischen f_Q und f_E tatsächlich gemessen werden kann. f_Q und f_E sind dabei die Frequenzen, die sich ergeben, je nachdem sich, ob sich die Quelle oder der Empfänger bewegt.

Eine Entwicklung der entsprechenden Formeln nach den Potenzen von $\frac{v}{c}$ ergibt:

$$f_Q = f_0 \cdot \left(1 + \frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^3 + \ldots\right) = f_E + f_0 \cdot \left(\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \ldots\right) \qquad (5)$$

Die beiden Frequenzen unterscheiden sich also um

$$\Delta f = f_0 \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

In unserem Fall ergibt sich so

$$\Delta f = 20741,6Hz \cdot \left(\frac{0,505m/s}{345,97m/s}\right)^2 \approx 0,044Hz$$

Da die Frequenz ohne Dezimalstellen gemessen wurde (die obige kommt durch die Mittelwertbildung zustande) kann der Unterschied Δf, der im Bereich von einigen Hundertstel liegt mit der verwendeten Apparatur nicht gemessen werden.

5 Δ f in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit

Mit den aus 3.2.2 und 3.2.3 gewonnenen Ergebnissen sollen nun zwei Diagramme erstellt werden. Die jeweils ermittelten Frequenzänderungen Δf werden gegen die schon anfangs gemessenen Geschwindigkeiten aufgetragen. Mittels linearer Regression erhält man dann den Proportionalitätsfaktor (Geradensteigung) zwischen Δf und v.

Da dieser Proportionalitätsfaktor $1/\lambda$ entspricht, ergibt sich:
nach direkter Messung:

$$\frac{1}{\lambda} = 59,7(\pm 0,5)\frac{1}{m}$$

nach der Schwebungsmethode:

$$\frac{1}{\lambda} = 59,0(\pm 0,4)\frac{1}{m}$$

6 Studentscher t-Test

Wir erhalten drei verschiedene Werte für $\frac{1}{\lambda}$, und zwar jeweils über:

- Wellenlängenmessung: $\frac{1}{\lambda} = (60,0 \pm 0,3)\frac{1}{m}$, $n = 6$
- Direkte Messung: $\frac{1}{\lambda} = (59,7 \pm 0,5)\frac{1}{m}$, $n = 6$
- Schwebungsmethode: $\frac{1}{\lambda} = (59,0 \pm 0,4)\frac{1}{m}$,$n = 6$

Mit hilfe des studentischen t-Tests soll nun überprüft werden, wie wahrscheinlich es ist, ob der Fehler der Werte statistischer oder systematischer Natur ist.

Sofern für ein errechnetes t folgendes gilt:

$$|t| > t_s$$

sind die Fehler mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-\alpha$ nicht mehr zufällig. t_s ist hierbei abhängig von α, welches das Signifikanzniveau darstellt und N, der Anzahl der Freiheitsgerade n_t. Nun gilt für t:

$$t = \frac{\overline{x_a} - \overline{x_b}}{\sigma_D}$$

Ein Wert für die Standartabweichung σ_D kann durch folgende Gleichung berechnet werden:

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{s_a^2(n_a-1)+s_b^2(n_b-1)}{n_a+n_b-2}\,\frac{n_a+n_b}{n_a n_b}}$$

6.1 Vergleich der Wellenlängenmessng mit der direkten Frequenzmessung

- $s_a = 0,33\frac{1}{m}$
- $s_b = 0,46\frac{1}{m}$
- $n_a = 6$
- $n_b = 6$
- $\sigma_D = 0,23$
- $t = 0,91$
- für α = 0,32 folgt $t_s = 1,07$

Da $t_s > t$ ist, folgt das es sich bei dem Vergleich zwischen Wellenlängenmessung und der direkten Frequenzmessung um keinen systematischen, sondern einen statistischen Fehler handelt.

6.2 Vergleich der direkten Frequenzmessung mit der Schwebungsmethode

- $s_a = 0,46\frac{1}{m}$
- $s_b = 0,43\frac{1}{m}$
- $n_a = 6$
- $n_b = 6$
- $\sigma_D = 0,26$
- $t = 2,76$
- für α = 0,05 folgt $t_s = 2,228$

Bei diesem Vergleich handelt es sich zu 95 Prozent um einen systematischen Fehler.

6.3 Vergleich der Wellenlängenmessung mit der Schwebungsmethode

- $s_a = 0,33\frac{1}{m}$
- $s_b = 0,43\frac{1}{m}$
- $n_a = 6$
- $n_b = 6$
- $\sigma_D = 0,22$
- $t = 4,15$
- für $\alpha = 0,009$ folgt $t_s = 4,44$

Und auch bei diesem Vergleich handelt es sich zu $99,8$ Prozent um einen systematischen Fehler.

Gründe für Systematische Fehler könnten folgende sein:

- Das Richtmikrophon war nicht vollkommen gerade ausgerichtet.
- Die Geschwindigkeit des Wagens war nicht sehr gleichmäßig.

7 Anhang

Gang:	6	12	18	24	30
1 Messung [s]	11,281	5,790	3,800	2,878	2,309
2 Messung [s]	11,284	5,681	3,797	2,869	2,312
3 Messung [s]	11,277	5,668	3,798	2,869	2,315
4 Messung [s]	11,281	5,668	3,798	2,865	2,311
5 Messung [s]	11,276	5,674	3,795	2,870	2,315
6 Messung [s]	11,279	5,680	3,798	2,873	2,314
Mittelwert [s]	11,280	5,694	3,798	2,871	2,313
Standartabweichung	0,003	0,048	0,002	0,004	0,002
Geschindigkeit v_{wagen} $[\frac{m}{s}]$	0,051	0,100	0,151	0,199	0,247
” Fehler	0,004	0,046	0,002	0,003	0,002
Gang:	36	42	48	54	60
1 Messung [s]	1,915	1,627	1,447	1,283	1,132
2 Messung [s]	1,937	1,639	1,458	1,281	1,136
3 Messung [s]	1,940	1,646	1,409	1,277	1,130
4 Messung [s]	1,938	1,625	1,450	1,277	1,127
5 Messung [s]	1,933	1,639	1,447	1,280	1,135
6 Messung [s]	1,927	1,640	1,439	1,285	1,130
Mittelwert [s]	1,932	1,636	1,442	1,281	1,132
Standartabweichung	0,009	0,008	0,017	0,003	0,003
Geschindigkeit v_{wagen} $[\frac{m}{s}]$	0,296	0,350	0,397	0,447	0,505
” Fehler	0,006	0,005	0,009	0,002	0,002

Tabelle 1: Übersicht der von dem Wagen benötigten Zeiten

Die Fehler wurden nach der Gauß’schen Fehlerfortpflanzungsformel berechnet, welche zur fehlerberechnung der Geschindigkeit folgendermaßen lautet:

$$S_{v_{wagen}} = \sqrt{s_l^2 * \left(\frac{1}{\bar{t}}\right)^2 + s_t^2 * \left(\frac{l}{\bar{t}^2}\right)^2}$$

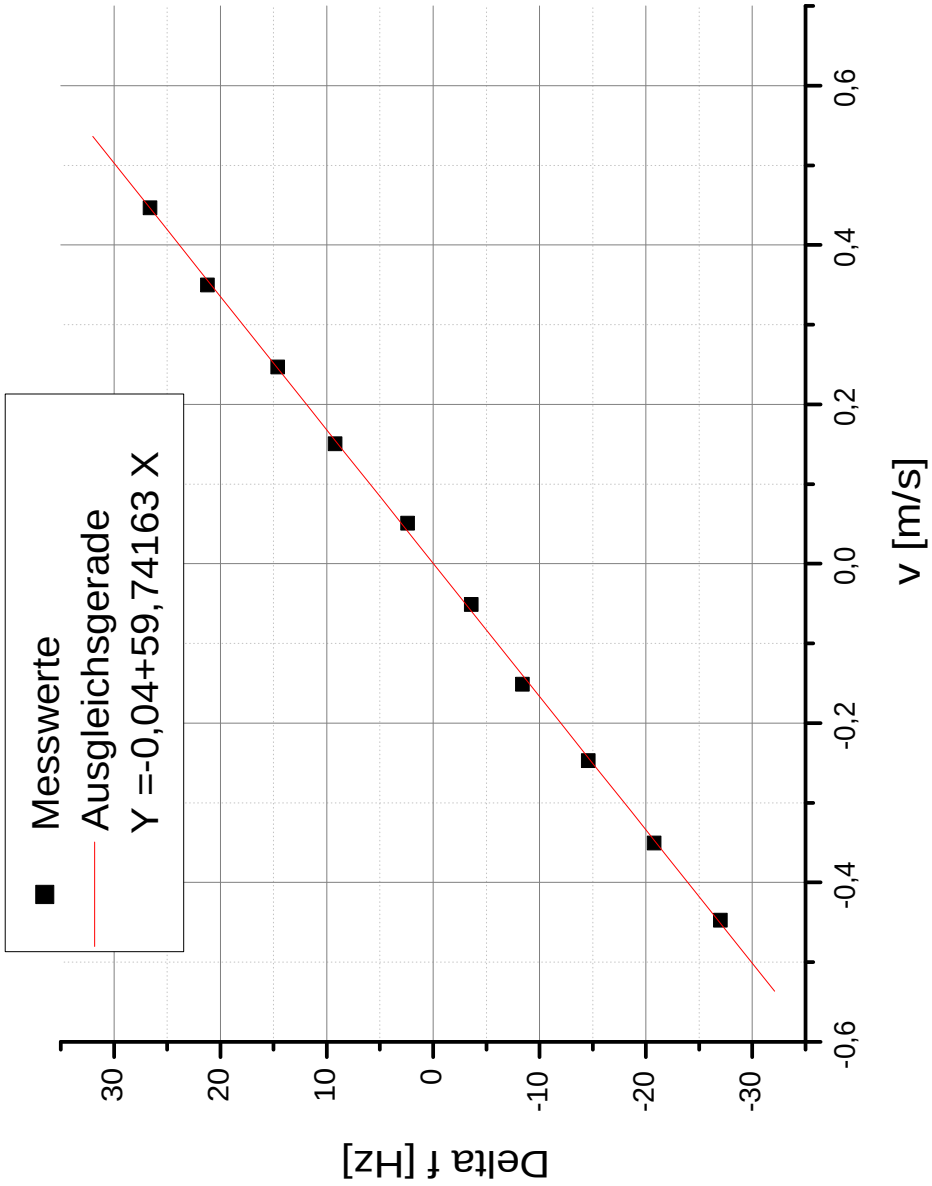


Abbildung 7: Aufbau

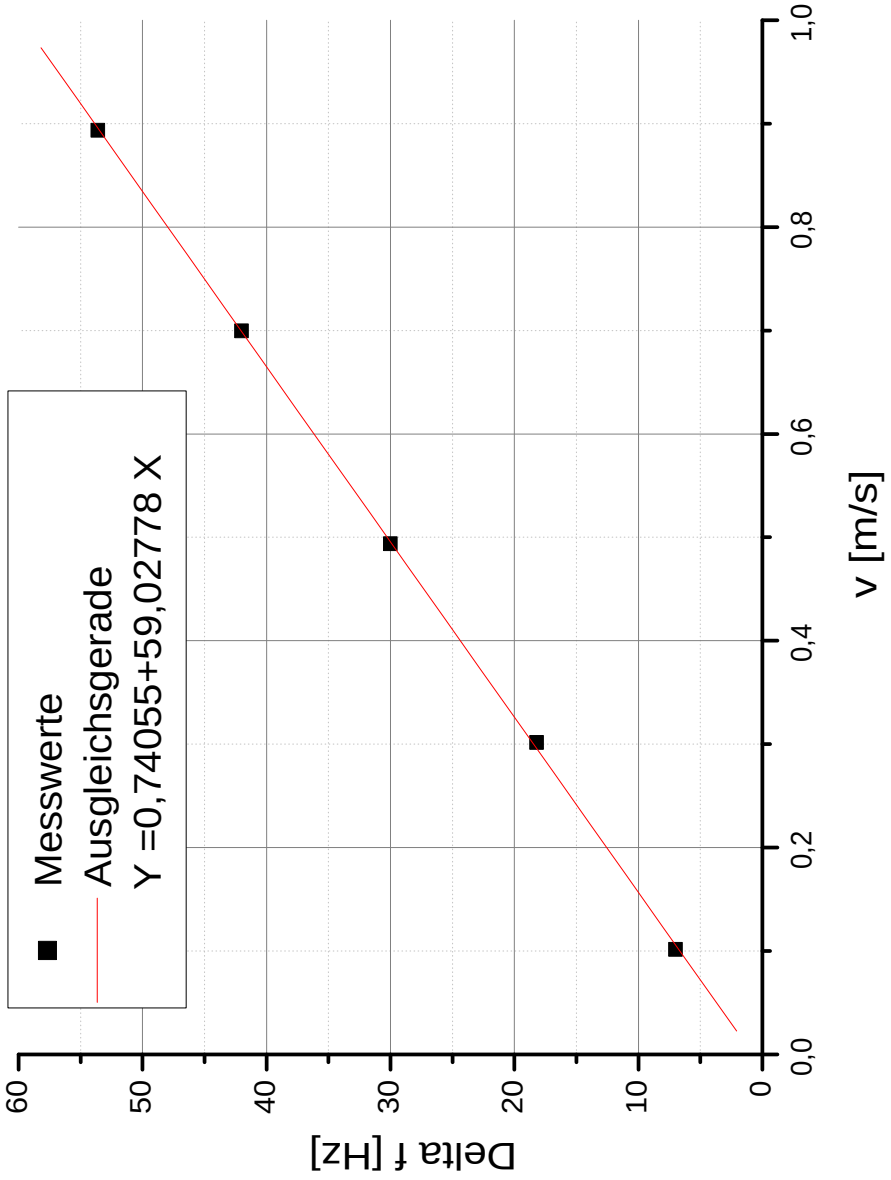


Abbildung 8: Aufbau